sugaku books
すうがくぶっくす

森　毅・斎藤正彦・野崎昭弘／編集

9

超準的手法にもとづく
確率解析入門

釜江哲朗
著

朝倉書店

sugaku books
すうがくぶっくす 9

森　毅・斎藤正彦・野崎昭弘／編集

超準的手法にもとづく
確率解析入門

釜江哲朗 著

朝倉書店

編 集 者

森　　　毅（もり つよし）	京都大学教養部教授
斎藤正彦（さいとう まさひこ）	東京大学教養学部教授
野崎昭弘（のざき あきひろ）	国際基督教大学教養学部教授

まえがき

この本は，大学の一般教養程度の数学を前提とし，確率解析を自力で学べるよう意図されたものである．とくに，第1章は，高等学校での確率統計の延長で，有限確率空間上の組合せ確率を論じたものである．確率論の本質の多くが，組合せ論的事実に根ざしていることは強調されてよい．ランダム・ウォークにおける鏡像原理から，ブラウン運動の重要な諸性質が導かれる．また，中心極限定理の基礎は，スターリングの公式にあるといってよい．本書の意図は，このような本質をできるだけ露にしたまま，無限確率空間，連続時間径数の議論に移行することにあった．このため，超準解析を用いた．とくに，超有限性をもとに，組合せ確率を発展させた．

第2章では，測度と積分を論じた．測度論は，確率論を論じるための道具として必要なものであるが，本書では，必要最小限度にとどめた．第3章では，超準解析を導入し，確率論をこの枠組で論じた．とくに，加法過程に照準を合せ，無限分解可能な分布の標準形，加法過程の軌道の片側連続性などを導いた．

この本は，2,3の例外を除いて，自己完結的となっている．例外の一つは，3.2節の移行の原理であるが，これについては，

［1］ 斎藤正彦：超積と超準解析，東京図書，1987（増補版）.

を参照されたい．また，3.3節の公理系については，論文

［2］ T. Kawai: Nonstandard analysis by axiomatic method, Southeast

Asian Conference on Logic, North-Holland, 1983.

を参照されたい. 組合せ確率論全般については,

[3] W. Feller (河田龍夫監訳): 確率論とその応用 (上, 下), 紀伊國屋書店, 1960.

を参照されたい.

この本を書くにあたっては, 鹿児島大学の河合徹氏と大阪教育大学の高嶋恵三氏から, 貴重な助言をいただいた. また, 朝倉書店編集部の方方の励ましにより, 何とか完成にたどりついた. この場を借りて感謝の意を表したい.

1989年12月

釜 江 哲 朗

目　　次

1

組合せ確率論

1.1 有限確率空間

コインを投げると表と裏が，ともに，1/2 の確率で出現する．このように，定まった確率で結果が出現するような行為を**試行**と呼ぶ．試行の繰返しを**試行列**と呼ぶ．コインを繰返し投げるといった試行では，各試行の確率は，前後の試行の結果に左右されない．このような試行列は**独立試行列**と呼ばれる．試行または試行列での可能な結果の集まりを，**事象**と呼ぶ．事象には，それが出現する確率が付与されている．

例えば，表裏が等確率で出現するコインを 3 回投げるという独立試行列を考える．表を 1，裏を -1 で表すとき，この試行列の結果は，$\{-1, 1\}$ からなる長さ 3 の列で表される．$(1, -1, 1)$ は，3 回の試行の結果が表，裏，表となるという事象を表し，この確率は，1/8 である．さらに，$\{(1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$ は，1 回目と 2 回目が表で，3 回目は表裏どちらでもよいという事象を表し，その確率は 1/4 である．

この例における事象 $(1, -1, 1)$ のように，これ以上分割できない事象を**基本事象**と呼ぶ．すべての事象は，基本事象の集合(空集合も含む)として表される．基本事象の全体を**確率空間**と呼ぶ．有限な確率空間では，事象の確率は，それに含まれる基本事象の確率の和となる．事象に対して，その確率を対応させる関数を**確率測度**（または，単に**確率**）と呼ぶ．

すなわち，**有限確率空間**とは，以下の条件を満す組 (Ω, P) のことで

ある．

（1） Ω は空でない有限集合．

（2） Ω の部分集合の全体を $\mathcal{P}(\Omega)$ と表すとき，P は $\mathcal{P}(\Omega)$ から〔0, 1〕への写像で，

（i） $P(\phi)=0$ （ϕ は空集合）

（ii） $P(\Omega)=1$

（iii） $A\in\mathcal{P}(\Omega)$ に対して，

$$P(\mathrm{A})=\sum_{\omega\in A}P(\omega)$$

を満している．

ここで，Ω の元は基本事象を意味し，$\mathcal{P}(\Omega)$ の元は事象を意味する．また，$P(A)$ は事象 A の確率である．上の例だと，Ω は，長さ 3 の $\{-1, 1\}$ の列の全体（全部で 8 個ある）で，Ω の各元 ω に対して，$P(\omega)=1/8$ となっている．

有限確率空間 (Ω, P) が与えられたとする．このとき，Ω 上の関数を**確率変数**と呼ぶ．例えば，上の例において，Ω の元 $\omega=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ に対して，

$$X_n(\omega)=\omega_n \qquad (n=1, 2, 3)$$

と定義するとき，X_1, X_2, X_3 は確率変数となる．これは，1 回目，2 回目，3 回目の試行を表すものである．また，

$$Y(\omega)=\sum_{n=1}^{3}\omega_n$$

も確率変数である．これらの確率変数の間には，$Y=X_1+X_2+X_3$ という関係がある．

一般に，有限確率空間 (Ω, P) 上の E 値確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ が与えられ，さらに，関数 $f: E^n\to F$ が与えられたとき，Ω 上の関数

$$\omega\longmapsto f(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$$

は F 値確率変数となる．ただし，E, F は集合とする．これを，$f(X_1, \cdots, X_n)$ と記す．また，n 変数 $x_1, \cdots, x_n$ に関する命題 $R(x_1, \cdots, x_n)$ と

n 個の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ が与えられたとき，事象 $\{\omega\in\Omega;\ R(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))\}$ を $\{R(X_1, \cdots, X_n)\}$ と略記する．また，この確率は，$P(R(X_1, \cdots, X_n))$ と記される．

有限確率空間 (Ω', P') が (Ω, P) の**拡張**であるとは，写像 $\varphi: \Omega'\to\Omega$ が存在して，任意の $\omega\in\Omega$ に対して，

$$P(\omega)=P'(\varphi^{-1}(\omega))$$

が成立することをいう．このとき，Ω 上の確率変数 X は，Ω' 上の確率変数 $X\circ\varphi$ と同一視される．また，事象 $A\subset\Omega$ も Ω' 上の事象 $\varphi^{-1}A$ と同一視される．例えば先の例で，4 回目の試行を考えるときは，$\Omega=\{-1,\ 1\}^3$ の拡張として，$\Omega'=\{-1,\ 1\}^4$ と

$$\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

となる $\varphi: \Omega'\to\Omega$ を考えればよい．このとき，Ω' 上では，3 回目までの試行 X_1, X_2, X_3 と合せて 4 回目の 試行 X_4 を考えることができる．このように，有限確率空間は必要に応じて拡張されるものとする．

1.2 期待値と分散

有限確率空間 (Ω, P) 上の実数値確率変数 X が与えられたとき，その**期待値**（**平均**とも呼ぶ）を

$$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\omega)$$

と定義する．また，**分散**を

$$V(X)=E((X-E(X))^2)$$

と定義する．

〔定理 1.1〕 確率変数 X, Y と実数 c に対して，

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$
$$E(cX)=cE(X)$$

が成立する．

証明：明らか． （証明終）

〔定理 1.2〕 $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

証明：$V(X)=\sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)-E(X))^2P(\omega)$

$$=\sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)^2-2X(\omega)E(X)+E(X)^2)P(\omega)$$

$$=E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+E(X)^2$$

$$=E(X^2)-E(X)^2$$

(証明終)

〔**定理 1.3**〕(チェビシェフの不等式)　$E(X)=\mu$, $V(X)=v$ とおくとき，任意の正数 c に対して，

$$P(|X-\mu|\geqq c)\leqq\frac{v}{c^2}$$

証明：

$$P(|X-\mu|\geqq c)=E(1_{|X-\mu|\geqq c})$$

$$\leqq E\left(\frac{1}{c^2}(X-\mu)^2\right)=\frac{1}{c^2}E((X-\mu)^2)=\frac{v}{c^2}$$

となる．ただし，$1_{|X-\mu|\geqq c}$ は，事象 $\{|X-\mu|\geqq c\}$ 上で 1，他では 0 の値をとる確率変数を意味する．(証明終)

1.3 条件付確率，独立性とマルコフ性

有限確率空間 (Ω, P) 上の事象 $B\subset\Omega$ で $P(B)>0$ となるものが与えられたとき，B の下での**条件付確率**を

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\qquad(A\in\mathcal{P}(\Omega))$$

と定義する．また，実数値確率変数 X の B の下での**条件付期待値**を

$$E(X|B)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\omega|B)$$

$$=\frac{\sum_{\omega\in B}X(\omega)P(\omega)}{P(B)}$$

と定義する．また，$P(B)=0$ の場合，$P(A|B)$ や $E(X|B)$ は 0/0 の不定形となっているが，都合のよいように値を定めることにする．これらは，$P(A|B)P(B)$ や $E(X|B)P(B)$ といった形で用いられ，最終的な結論には，$P(B)=0$ の場合の値は影響を与えない．

事象 A，実数値確率変数 X および確率変数 Y が与えられたとき，

$$P(A|Y)(\omega)=P(A|Y=Y(\omega))$$
$$E(X|Y)(\omega)=E(X|Y=Y(\omega))$$
と定義することにより，$P(A|Y)$ および $E(X|Y)$ は確率変数と考えられる．例えば，1.1 節の例で
$$X=X_1, \qquad Y=X_1+X_2+X_3$$
とするとき，
$$E(X|Y)(\omega)=\frac{\omega_1+\omega_2+\omega_3}{3}$$
となる．

〔定理 1.4〕 X と Y は確率変数で，X は実数値とする．B は $P(B)>0$ を満す事象とする．このとき，
$$E(X|B)=\sum_y E(X|B, Y=y)P(Y=y|B)$$
が成立する．ただし，右辺は，Y の値域に属す y についての和を表す．

証明：
$$\sum_y E(X|B, Y=y)P(Y=y|B)$$
$$=\sum_y \frac{\sum_{\omega;\omega\in B, Y(\omega)=y} X(\omega)P(\omega)}{P(B, Y=y)} \frac{P(B,\ Y=y)}{P(B)}$$
$$=\sum_y \sum_{\omega;\omega\in B,\ Y(\omega)=y} \frac{X(\omega)P(\omega)}{P(B)}=\sum_{\omega\in B}\frac{X(\omega)P(\omega)}{P(B)}=E(X|B)$$
（証明終）

二つの確率変数 X と Y が**独立**であるとは，X の値域に属す任意の x と Y の値域に属す任意の y に対して
$$P(X=x,\ Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$$
が成立することである．このことは，任意の x と，$P(Y=y)>0$ となる y に対して
$$P(X=x|Y=y)=P(X=x)$$
が成立することと同値である．

故に，X と Y が独立であることは，任意の x に対して
$$P(X=x|Y)=P(X=x)$$

が成立することと同値となる．同様に，これは，任意の y に対して

$$P(Y=y|X)=P(Y=y)$$

が成立することと同値となる．確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$ が**独立**であるとは

$$P(X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n} P(X_i=x_i)$$

が各々の確率変数の値域に属す $x_1, \cdots, x_n$ に対して成立することである．このような確率変数列を**独立列**と呼ぶ．

〔定理 1.5〕 確率変数列 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ が独立であるための必要十分条件は，任意の $i=1, \cdots, n$ と x_i に対して

$$P(X_i=x_i|X_0, \cdots, X_{i-1})=P(X_i=x_i)$$

が成立することである．

証明：$X_0, X_1, \cdots, X_n$ が独立とする．このとき，任意の $x_0, x_1, \cdots, x_n$ に対して

$$P(X_0=x_0, X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n)=\prod_{i=0}^{n} P(X_i=x_i)$$

が成立する．故に，

$$\begin{aligned}P(X_0=x_0, \cdots, X_i=x_i) &= \sum_{x_{i+1}, \cdots, x_n} P(X_0=x_0, \cdots, X_i=x_i, \cdots, X_n=x_n) \\ &= \sum_{x_{i+1}, \cdots, x_n} \prod_{j=0}^{n} P(X_j=x_j) \\ &= \prod_{j=0}^{i} P(X_j=x_j)\end{aligned}$$

となり，また，

$$P(X_0=x_0, \cdots, X_{i-1}=x_{i-1})=\prod_{j=0}^{i-1} P(X_j=x_j)$$

だから

$$\begin{aligned}&P(X_0=x_0, \cdots, X_{i-1}=x_{i-1}, X_i=x_i) \\ &\quad =P(X_0=x_0, \cdots, X_{i-1}=x_{i-1})P(X_i=x_i)\end{aligned}$$

を得る．これより，$P(X_0=x_0, \cdots, X_{i-1}=x_{i-1})>0$ のとき，

$$P(X_i=x_i|X_0=x_0, \cdots, X_{i-1}=x_{i-1})=P(X_i=x_i)$$

が成立する．ここで，

$$P\{\omega\in\Omega;\ P(X_0=X_0(\omega),\cdots,X_{i-1}=X_{i-1}(\omega))=0\}$$
$$=\sum_{x_0\cdots x_{i-1};P(X_0=x_0,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1})=0}P(X_0=x_0,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1})$$
$$=0$$

となる．$P(X_0=X_0(\omega),\cdots,X_{i-1}=X_{i-1}(\omega))=0$ となる ω に対して条件付確率を都合よく定めることにすると，任意の x_i に対して

$$P(X_i=x_i|X_0,\cdots,X_{i-1})=P(X_i=x_i)$$

が成立することとなる．

逆に，このとき，

$$P(X_0=x_0,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1},X_i=x_i)$$
$$=P(X_0=x_0,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1})P(X_i=x_i)$$

が任意の $x_0,\cdots,x_{i-1},x_i$ に対して成立する．故に，

$$P(X_0=x_0,\cdots,X_n=x_n)$$
$$=P(X_0=x_0,\cdots,X_{n-1}=x_{n-1})P(X_n=x_n)$$
$$=P(X_0=x_0,\cdots,X_{n-2}=x_{n-2})P(X_{n-1}=x_{n-1})P(X_n=x_n)$$
$$=\cdots$$
$$=\prod_{i=0}^{n}P(X_i=x_i)$$

となり，確率変数列 $X_0,X_1,\cdots,X_n$ は独立となる．　(証明終)

確率変数列 $X_0,X_1,\cdots,X_n$ が**マルコフ的**であるとは，任意の $i=2,\cdots,n$ と x_i に対して

$$P(X_i=x_i|X_0\cdots X_{i-1})=P(X_i=x_i|X_{i-1})$$

が成立することをいう．このような確率変数列を**マルコフ列**と呼ぶ．マルコフ列においては，独立列とは異なり，過去の試行結果が i 時点での試行 X_i の確率法則に影響を及ぼすが，これが直前の値 X_{i-1} だけで定まっている．すなわち，独立列が記憶のない確率変数列だとすれば，マルコフ列は直前の記憶のみをもつ確率変数列だといえる．

1.4 パスカルの三角形

組合せ数 $\binom{n}{i}$ を導入するため，パスカルは次のような三角形を考察した (図 1.1). 頂点に 1 を置く. この点を含む行と列を 0 行，0 列と呼び，以下，下方に向って 1 行，2 行，…，右方に向って 1 列，2 列，… と名付ける. 各行での値は，一つ上の行での値から求まる. すなわち，ある点での値は，真上と左斜め上の点での値の和と定められる. このようにして，パスカルの三角形が得られる. 三角形の外には，0 が置かれているものと考える. パスカルの三角形での，n 行 i 列の値は，組合せ数 $\binom{n}{i}$ であり，

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
⋮						⋱

図 1.1

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

となることがわかる. パスカルの三角形の作り方から明らかなように，$\binom{n}{i}$ は頂点から n 行 i 列の点に到達する道の総数に等しい. ただし，道は真下または右斜め下に進んでいくものとする.

パスカルの三角形において，頂点から n 行に達する道の全体を Ω とする. Ω の元 ω は，$\{0,1\}$ の列 $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ と表される. ただし，ω_i は，$(i-1)$ 行から i 行へ真下に進むか右斜め下に進むかに従って 0 または 1 をとる. $\omega=(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ のとき，道 ω が i 行 j 列を通過することは

$$j=\sum_{k=1}^{i}\omega_k$$

と同値となる. $0<p<1$ を満す実数 p が与えられたとき，Ω 上の確率測度 P を

$$P(\omega)=p^{\sum_{i=1}^{n}\omega_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}\omega_i}$$

で与える. また，各 $i=0,1,\cdots,n$ に対して，確率変数 X_i を

$$X_i(\omega)=\sum_{j=1}^{i}\omega_j$$

と定義する．ただし，すべての $\omega\in\Omega$ に対して，$X_0(\omega)=0$ とする．このような確率変数列 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ は，生起の確率 p の独立試行列における各回までの生起の回数を表している．また，これは，パスカルの三角形の頂点を出発して，各回ごとに独立に，真下に $1-p$，右斜め下に p の確率で下降していく道が，各行において通過する列の番号を表しているともいえる．$X_0, X_1, \cdots, X_n$ はマルコフ列となり

$$P(X_i=k\,|\,X_{i-1}=j)=\begin{cases} 1-p & (k=j) \\ p & (k=j+1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

が成立する．

パスカルは，賭けを中断した場合の分配問題を論じた．1654 年にはじまるこれについてのフェルマーとの往復書簡が，確率論の出発点とされている．各回ごとに生起の確率が p である試行を n 回行なった結果，生起回数が j のとき金額 $\varphi(j)$ を受け取るものとする．試行を m 回行ない j 回生起した時点で，賭けを中断した場合，いくら受け取るのが妥当であろうか．パスカルはこれを以下のように解いた．試行を m 回行ない j 回生起した時点で受け取るべき金額を $f(m,j)$ とする．明らかに，

$$f(n,j)=\varphi(j) \qquad (j=0,1,\cdots,n)$$

が成立する．また $f(n-1,j)$ は，n 回目の試行で生起すれば $f(n,j+1)$ 受け取り，n 回目の試行で生起しなければ $f(n,j)$ 受け取ることになり，それぞれの確率が p と $1-p$ だから

$$f(n-1,j)=pf(n,j+1)+(1-p)f(n,j) \qquad (j=0,1,\cdots,n-1)$$

とするのが妥当である．このようにして，$n-1$ 行での値が n 行での値から定まる．同様にして，各行での f の値は，一つ下の行での値から

$$f(m,j)=pf(m+1,\ j+1)+(1-p)f(m+1,j) \qquad (j=0,1,\cdots,m)$$

と求まっていく．このように定められる $f(m,j)$ は $E(\varphi(X_n)\,|\,X_m=j)$ にほかならない．$p=1/2$，$n=7$，$\varphi(j)=0$ $(j=0,1,2,3)$，$\varphi(j)=1$ $(j=4,5,6,7)$ の場合の例を図 1.2 に示した．

$\frac{1}{2}$							
$\frac{11}{32}$	$\frac{21}{32}$						
$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{16}$					
$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{15}{16}$				
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	1			
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	1		
0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	1	
0	0	0	0	1	1	1	1

図 1.2

頂点を出発した道が m 行 j 列を通る確率 $g(m,j)=P(X_m=j)$ は方程式

$$g(0,0)=1$$

$$g(m,j)=pg(m-1,j-1)+(1-p)g(m-1,j)$$

$$\begin{pmatrix} m=1,2,\cdots \\ j=0,1,\cdots,m \end{pmatrix}$$

により過去から未来へと定まっていくのに反し，中断した時点での分配 $f(m,j)=E(\varphi(X_n)\,|\,X_m=j)$ は方程式

$$f(n,j)=\varphi(j) \qquad (j=0,1,\cdots,n)$$

$$f(m,j)=pf(m+1,j+1)+(1-p)f(m+1,j)$$

$$\begin{pmatrix} m=n-1,\cdots,1,0 \\ j=0,1,\cdots,m \end{pmatrix}$$

により未来から過去へと定まっていく．前者を**前進方程式**，後者を**後退方程式**と呼ぶ．

1.5 ベルヌイの法則

〔**定理 1.6**〕 $X_1,\cdots,X_n$ は独立な確率変数列で，$Y=f(X_1,\cdots,X_i)$ と $Z=g(X_{i+1},\cdots,X_n)$ は，それぞれ $X_1,\cdots,X_i$ および $X_{i+1},\cdots,X_n$ 上の実数値確率変数とする．このとき，Y と Z は独立で，

$$E(YZ)=E(Y)E(Z)$$

が成立する．

証明：任意の y と z に対して

$$P(Y=y,\ Z=z)=\sum_{\substack{x_1,\cdots,x_n; \\ f(x_1,\cdots,x_i)=y \\ g(x_{i+1},\cdots,x_n)=z}} P(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n)$$

$$= \sum_{\substack{x_1, \cdots, x_n; \\ f(x_1, \cdots, x_i) = y \\ g(x_{i+1}, \cdots, x_n) = z}} P(X_1 = x_1, \cdots, X_i = x_i) P(X_{i+1} = x_{i+1}, \cdots, X_n = x_n)$$

$$= \sum_{\substack{x_1, \cdots, x_i \\ f(x_1, \cdots, x_i) = y}} P(X_1 = x_1, \cdots, X_i = x_i)$$

$$\times \sum_{\substack{x_{i+1}, \cdots, x_n \\ g(x_{i+1}, \cdots, x_n) = z}} P(X_{i+1} = x_{i+1}, \cdots, X_n = x_n)$$

$$= P(Y = y) P(Z = z)$$

が成立し，Y と Z は独立となる．また，

$$\begin{aligned} E(YZ) &= \sum_{y, z} yzP(Y = y,\ Z = z) \\ &= \sum_{y, z} yzP(Y = y) P(Z = z) \\ &= \sum_{y} yP(Y = y) \sum_{z} zP(Z = z) \\ &= E(Y) E(Z) \end{aligned}$$

を得る． (証明終)

〔**定理 1.7**〕 $X_1, \cdots, X_n$ は独立な確率変数列とする．このとき，

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$$

が成立する．

証明：定理 1.1，1.2 および 定理 1.6 より

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + 2\sum_{i<j} E(X_i X_j) - \left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + 2\sum_{i<j} E(X_i) E(X_j) - \sum_{i=1}^{n} E(X_i)^2 \\ &\quad - 2\sum_{i<j} E(X_i) E(X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \sum_{i=1}^{n} E(X_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \end{aligned}$$

(証明終)

〔**定理 1.8**〕(ベルヌイの法則) $X_1, \cdots, X_n$ は独立な実数値確率変数列で $E(X_i) = \mu$，$V(X_i) = v$ $(i = 1, \cdots, n)$ を満すものとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

が成立する．

証明： 明らかに

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mu$$

となる．また，定理 1.7 より

$$V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{v}{n}$$

が成立する．故に，定理 1.3 より

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \geqq \varepsilon\right) \leqq \frac{v}{n\varepsilon^2}$$

となる．これより

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right) \geqq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{v}{n\varepsilon^2}\right) = 1$$

を得る．（証明終）

ベルヌイの法則は，独立試行列においては $n\to\infty$ のとき，**標本平均** $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ が，期待値の近くに確率的に集中することを意味する．18 世紀初頭，ヤコブ・ベルヌイによって発見されたこの法則は，確率論の適用範囲を，サイコロのように確率値が既知の確率現象から，確率値が未知の社会現象や，天文観測の誤差解析に広げるきっかけとなった．すなわち，未知の確率値を，繰返し観測することにより知りうる根拠を与えるものであった．

1.6 分布関数

実数値確率変数 X が与えられたとき，

$$F_X(x) = P(X \leqq x) \qquad (x \in \boldsymbol{R})$$

と定義する．関数 $F_X : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は次の性質をもっている（$F = F_X$ とおいた）．

（1） F は（広義）単調増加で右連続．

（2） $F(-\infty):=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$

$F(\infty):=\lim_{x\to\infty}F(x)=1$

このような性質をもつ関数 F は，一般に（$\boldsymbol{R}$ 上の）**分布関数**と呼ばれる．とくに，上の F_X は**確率変数 X の分布関数**と呼ばれる．また，X は分布 F_X に従うともいう．

分布関数 F が

$$F(x)=\sum_{y\leq x}p(y)$$

または

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(y)\,dy$$

で与えられるとき，それぞれ，F は**離散**または**絶対連続**であるといい，このような p または f を，それぞれ，**点測度**または**密度**と呼ぶ．有限確率空間上の確率変数の分布関数は離散となるが，のちに一般の確率空間上で，離散でない分布関数をもつ確率変数も考察される．

点測度 p または密度 f をもつ分布関数 F の**平均** μ は，それぞれ

$$\mu=\sum_{x}xp(x)$$

または

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx$$

と定義される．また，F の**分散**は，それぞれ

$$\sum_{x}(x-\mu)^2p(x)$$

または

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)\,dx$$

と定義される．とくに，確率変数 X の分布関数が F のとき，X の平均および分散は，F の平均および分散と一致する．

分布関数列 $F_n(n=1,2,\cdots)$ と分布関数 F が与えられたとき，

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$$

が F のすべての**連続点**（すなわち，$F(x-0)=F(x+0)=F(x)$ となる点）で成立するとき，F_n は F に**弱収束**するという．

$0<p<1$ を満す実数 p と正整数 n が与えられたとき，点 $x=0, 1, \cdots, n$ において点測度

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^x$$

をもつ分布関数を $B(n, p)$ と書き，**二項分布**と呼ぶ．$X_1, \cdots, X_n$ が独立確率変数列で

$$\begin{aligned} P(X_i=0)&=1-p \\ P(X_i=1)&=p \end{aligned} \qquad (i=1, \cdots, n)$$

を満すとき，確率変数 $X=X_1+\cdots+X_n$ の分布関数は $B(n, p)$ となる．故に，分布関数 $B(n, p)$ の平均と分散は

$$\begin{aligned} E(X)&=nE(X_1)=np, \\ V(X)&=nV(X_1)=np(1-p) \end{aligned}$$

で与えられる．

$\lambda>0$ が与えられたとき，$x=0, 1, 2, \cdots$ において点測度

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

をもつ分布関数 $P(\lambda)$ を**ポアソン分布**と呼ぶ．この分布関数の平均と分散はそれぞれ

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+1}}{x!} \\ &= \lambda \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} &= \sum_{x=0}^{\infty} \{x(x-1)+(1-2\lambda)x+\lambda^2\} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+2}}{x!} + (1-2\lambda)\lambda+\lambda^2 \\ &= \lambda^2+(1-2\lambda)\lambda+\lambda^2=\lambda \end{aligned}$$

で与えられる．

実数 μ と正の実数 v が与えられたとき，密度

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}} \qquad (x\in\boldsymbol{R})$$

をもつ分布関数 $N(\mu, v)$ を**正規分布**と呼ぶ（図 1.3）．この分布関数の平均と分散を求めよう．

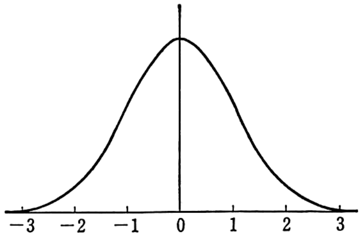


図 1.3 正規分布 $N(0,1)$ の密度関数

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}dx=\mu+\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}dx$$
$$=\mu+\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2v}}dx$$
$$=\mu$$

となり平均は μ となる．ここで，奇関数の積分が 0 となることを用いた．また，

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{x^2}{2v}}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(-\frac{v}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{x^2}{2v}}\right)'dx$$
$$=\left[-x\frac{v}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{x^2}{2v}}\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{x^2}{2v}}dx$$
$$=v\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{x^2}{2v}}=v$$

となり分散は v となる．

平均 μ，分散 v をもつ分布関数 F が与えられたとき

$$G(x)=F(\sqrt{v}x+\mu) \qquad (x\in\boldsymbol{R})$$

によって定義される分布関数 G は平均 0，分散 1 をもつ．G を F の**標準化**と呼ぶ．

1.7 二項分布の極限

〔**定理 1.9**〕(スターリングの公式)　$n\to\infty$ のとき，

$$n!=\sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}(1+o(1))$$

が成立する．

証明：$y=\log x$ のグラフを考える (図 1.4)．図のように

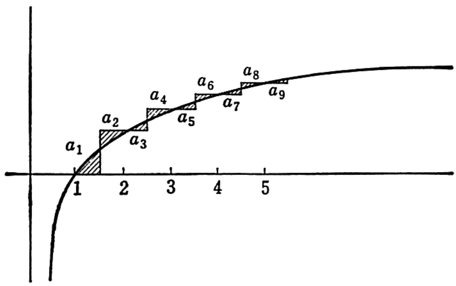


図 1.4　$y=\log x$ のグラフ

$$a_{2n-1}=\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx-\frac{1}{2}\log n$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

$$a_{2n}=\frac{1}{2}\log(n+1)-\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1}\log x\,dx$$

と定義する．関数 $y=\log x$ は上に凸だから，$\log(y+x)-\log y\ \ (x>0)$ は y に関して単調減少となり

$$\begin{aligned}a_{2n-1}-a_{2n}=&\int_0^{\frac{1}{2}}\{(\log(n+x)-\log n)\\&-(\log(n+1)-\log(n+1-x))\}dx\\\geqq&0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{2n}-a_{2n+1}=&\int_0^{\frac{1}{2}}\{(\log(n+1)-\log(n+1-x))\\&-(\log(n+1+x)-\log(n+1))\}dx\\\geqq&0\end{aligned}$$

が成立し，$a_1\geqq a_2\geqq a_3\geqq\cdots\geqq 0$ となる．また，

$$a_{2n-1}=\int_0^{\frac{1}{2}}\log\frac{n+x}{n}\,dx\leqq\int_0^{\frac{1}{2}}\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)dx$$

$$\leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2n} dx = \frac{1}{4n}$$

だから

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

となり，交代級数

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

は収束する．この和を S とおくとき，

$$\int_1^n \log x\, dx = \sum_{k=2}^{n-1} \log k + \frac{1}{2}\log n + a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-3} - a_{2n-2}$$

$$= \log(n!) - \frac{1}{2}\log n + S + o(1)$$

が成立する．ここで，$o(1)$ は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する項である．他方，

$$\int_1^n \log x\, dx = \Big[x \log x - x\Big]_1^n$$

$$= n \log n - n + 1$$

となるから

$$\log(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + 1 - S + o(1)$$

を得る．故に，

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{1-S} e^{o(1)}$$

$$= n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{1-S} (1 + o(1))$$

が成立する．ここで，

$$S_n = a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-3} - a_{2n-2}$$

とおくとき，

$$S_n = n \log n - n + 1 - \log(n!) + \frac{1}{2}\log n$$

だから

$$e^{1-S} = \lim_{n\to\infty} e^{S_{2n} - 2S_n + 1}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$$

を得る．他方，$0\leqq x\leqq\pi/2$ に対して $0\leqq\sin x\leqq1$ だから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2n+1}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2n}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2n-1}dx$$

が成立する．これらの定積分は，n に関する帰納法を用いて計算され

$$\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}\leqq\frac{\pi}{2}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}\leqq\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}{3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$$

を得る．各辺に，$\dfrac{3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}$ をかけると

$$\frac{2n}{2n+1}\leqq\pi n\left(\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}\right)^2\leqq1$$

となり，$n\to\infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\pi n\left(\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}\right)^2=1$$

を得る．故に，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}=\sqrt{\pi}$$

となり

$$e^{1-S}=\sqrt{2\pi}$$

が成立する．以上より

$$n!=\sqrt{2\pi n}\;n^ne^{-n}(1+o(1))$$

が証明された． (証明終)

〔**定理 1.10**〕 $0<p<1$ を満す実数 p が与えられたとき，

$$\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}(1+o(1))=\sqrt{\frac{n}{2\pi r(n-r)}}\left(\frac{np}{r}\right)^r\left(\frac{n(1-p)}{n-r}\right)^{n-r}$$

が成立する．ただし，任意の $0<a<b<1$ に対して，$o(1)$ は $n\to\infty$ のとき，$a\leqq r/n\leqq b$ を満す r に関して一様に 0 に収束する項となる．

証明：定理 1.9 より，任意の $\delta>0$ に対して，m が存在して

$$n!=\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}(1+\eta), \qquad |\eta|<\delta$$

が任意の $n\geqq m$ に対して成立する．故に，

$$n\geqq\frac{m}{\min\{a, 1-b\}}$$

のとき，$a\leqq r/n\leqq b$ となる任意の r に対して

$$\begin{aligned}&\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\\&=\frac{n!}{r!(n-r)!}p^r(1-p)^{n-r}\\&=\sqrt{\frac{n}{2\pi r(n-r)}}\left(\frac{np}{r}\right)^r\left(\frac{n(1-p)}{n-r}\right)^{n-r}(1+\eta_1)(1+\eta_2)^{-1}(1+\eta_3)^{-1}\end{aligned}$$

$|\eta_i|<\delta \qquad (i=1, 2, 3)$

が成立する．これより

$$\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}(1+\eta)=\sqrt{\frac{n}{2\pi r(n-r)}}\left(\frac{np}{r}\right)^r\left(\frac{n(1-p)}{n-r}\right)^{n-r}$$

$$1+\eta=(1+\eta_1)^{-1}(1+\eta_2)(1+\eta_3)$$

を得る．ここで，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，$|\eta|<\varepsilon$ とできるから，定理 1.10 が成立する．　(証明終)

〔定理 1.11〕　$0<p<1$ を満す実数 p が与えられたとき，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n-1}\left|\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}-\sqrt{\frac{n}{2\pi r(n-r)}}\left(\frac{np}{r}\right)^r\left(\frac{n(1-p)}{n-r}\right)^{n-r}\right|=0$$

が成立する．

証明：

$$\rho_r=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r} \qquad (r=0, 1, \cdots, n)$$

とおくとき，$r=0, 1, \cdots, n-1$ に対して

$$\frac{\rho_{r+1}}{\rho_r}=\frac{p}{1-p}\left(\frac{n+1}{r+1}-1\right)$$

だから

$$\frac{p}{1-p}n=\frac{\rho_1}{\rho_0}>\frac{\rho_2}{\rho_1}>\cdots>\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}=\frac{p}{1-p}\frac{1}{n}$$

となる．故に，十分大きな n に対して

$$\frac{\rho_u}{\rho_{u-1}} \geqq 2 > \frac{\rho_{u+1}}{\rho_u}, \qquad \frac{\rho_v}{\rho_{v-1}} > \frac{1}{2} \geqq \frac{\rho_{v+1}}{\rho_v}, \qquad u<v$$

となる u と v が定まる．このとき，

$$2=\lim_{n\to\infty}\frac{\rho_u}{\rho_{u-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{p}{1-p}\left(\frac{n+1}{u}-1\right)$$

だから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u}{n}=\frac{p}{2-p}$$

を得る．同様に

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v}{n}=\frac{2p}{1+p}$$

を得る．また，

$$\begin{aligned}
&\sum_{r<u-k}\rho_r+\sum_{r>v+k}\rho_r \\
&\quad \leqq \rho_u\sum_{i=k+1}^{\infty}2^{-i}+\rho_v\sum_{i=k+1}^{\infty}2^{-i} \\
&\quad \leqq 2^{-k}(\rho_u+\rho_v)\leqq 2^{-k} \qquad (k=1,2,\cdots)
\end{aligned}$$

だから

$$D_n=\left\{r;\ \frac{r}{n}<\frac{p}{2}\quad \text{または}\quad \frac{r}{n}>2p\right\}$$

とおくとき

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r\in D_n}\rho_r=0$$

を得る．また，

$$\lambda_r=\sqrt{\frac{n}{2\pi r(n-r)}}\left(\frac{np}{r}\right)^r\left(\frac{n(1-p)}{n-r}\right)^{n-r} \qquad (r=1,\cdots,n-1)$$

$$\xi(x)=x\log\frac{p}{x}+(1-x)\log\frac{1-p}{1-x} \qquad (0<x<1)$$

とおくとき，

$$\xi(p)=0, \qquad \xi'(x)=\log\frac{p(1-x)}{(1-p)x}$$

$$\xi'(p)=0, \qquad \xi''(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}<0$$

だから，$\xi(x)$ は $x=p$ で最大値 0 をとる．これより

$$\alpha:=\sup_{x;x<\frac{p}{2}\text{ または } x>2p}\xi(x)<0$$

を得る．また，

$$\lambda_r=\sqrt{\frac{n}{2\pi r(n-r)}}\,e^{n\xi\left(\frac{r}{n}\right)}$$

となるから

$$\sum_{r\in D_n}\lambda_r\leqq(n+1)e^{n\alpha}$$

が成立し，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r\in D_n}\lambda_r=0$$

を得る．故に，定理 1.10 を用いて

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n-1}\left|\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}-\sqrt{\frac{n}{2\pi r(n-r)}}\left(\frac{np}{r}\right)^r\left(\frac{n(1-p)}{n-r}\right)^{n-r}\right|\\&\leqq\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{r\in D_n}|\rho_n-\lambda_n|+\sum_{r\notin D_n}\rho_n\cdot o(1)\right\}\\&=0\end{aligned}$$

が成立する．ここで，上式の $o(1)$ が $r\notin D_n$ を満す r に関して一様であることを用いた． (証明終)

〔定理 1.12〕 $np\to\lambda$ $(0<\lambda<\infty)$ となるように $n\to\infty$，$p\to 0$ とするとき，二項分布関数 $B(n,p)$ はポアソン分布関数 $P(\lambda)$ に弱収束する．また，p $(0<p<1)$ を一定にして $n\to\infty$ のとき，$B(n,p)$ の標準化は正規分布関数 $N(0,1)$ に弱収束する．

証明：$n\to\infty$，$p\to 0$ かつ $np\to\lambda$ のとき，任意に固定された $r=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\begin{aligned}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}&=\frac{n^r}{r!}(1+o(1))p^r(1-p)^{\frac{\lambda}{p}+o(1)-r}\\&=\frac{1}{r!}(np)^r(1-p)^{\frac{\lambda}{p}}(1+o(1))\end{aligned}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}(1+o(1))$$

が成立する．故に，任意の $x\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$\sum_{0\leq r\leq x}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\longrightarrow\sum_{0\leq r\leq x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}$$

となり，$B(n,p)$ は $P(\lambda)$ に弱収束する．次に，$r=0,1,\cdots,n$ の関数 z を

$$z=\frac{r-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

と定義するとき，$B(n,p)$ の標準化は点測度

$$p(z)=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

で与えられる．

$$\lambda_0=\lambda_n=0$$

$$\lambda_r=\sqrt{\frac{n}{2\pi r(n-r)}}\left(\frac{np}{r}\right)^r\left(\frac{n(1-p)}{n-r}\right)^{n-r}\qquad(r=1,\cdots,n-1)$$

$$\xi(x)=x\log\frac{p}{x}+(1-x)\log\frac{1-p}{1-x}\qquad(0<x<1)$$

とおくとき，定理 1.11 より

$$\begin{aligned}&\varliminf_{n\to\infty}\sum_{z\leq x}p(z)\\&\quad=\varliminf_{n\to\infty}\sum_{z\leq x}\lambda_r\\&\quad\geqq\lim_{y\to-\infty}\varliminf_{n\to\infty}\sum_{y\leq z\leq x}\lambda_r\\&\quad=\lim_{y\to-\infty}\varliminf_{n\to\infty}\sum_{y\leq z\leq x}\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}e^{n\xi\left(\frac{r}{n}\right)}\\&\quad=\lim_{y\to-\infty}\varliminf_{n\to\infty}\sum_{y\leq z\leq x}\frac{\Delta z}{\sqrt{2\pi}}e^{n\xi\left(p+\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}z\right)}\end{aligned}$$

が成立する．ここで

$$\Delta z=\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$$

とおいた．また，

$$\xi(p)=\xi'(p)=0$$

$$\xi''(p) = -\frac{1}{p(1-p)}$$

だから

$$n\xi\left(p+\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,z\right) = \frac{z^2}{2}p(1-p)\xi''\left(p+\theta\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,z\right)$$

$$= -\frac{z^2}{2}(1+o(1))$$

が成立する．ただし，$0<\theta<1$ かつ ξ'' の連続性より，$o(1)$ は $y\leqq z\leqq x$ を満す z に関して一様に 0 に収束する項である．故に，

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{z\leqq x}p(z) \geqq \lim_{y\to-\infty}\varliminf_{n\to\infty}\sum_{y\leqq z\leqq x}\frac{\Delta z}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$= \lim_{y\to-\infty}\int_y^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

を得る．同様にして，

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{z>x}p(z) \geqq \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

を得るが，これより

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \leqq \varliminf_{n\to\infty}\sum_{z\leqq x}p(z)$$

$$\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\sum_{z\leqq x}p(z)$$

$$= 1-\varliminf_{n\to\infty}\sum_{z>x}p(z)$$

$$\leqq 1-\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

が導かれ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{z\leqq x}p(z) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dx$$

が成立する．故に，$B(n,p)$ の標準化は $n\to\infty$ のとき，$N(0,1)$ に弱収

束する．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

定理 1.12 により，生起の確率 p は小さいが試行回数 n が大きく，$np=\lambda$ が通常の大きさになるような独立試行列の生起回数は，平均 λ のポアソン分布関数をもつと考えてよい．一定期間内の事故件数や一定時間内にある番号にかけられる電話件数などはこの例である．また，生起確率 $p(0<p<1)$ が一定の独立試行列 $X_1,\cdots,X_n$ を考える．ただし，X_i は生起の場合 1，そうでない場合 0 の値をとるものとする．このとき，確率変数

$$Z_n=\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}(X_1+\cdots+X_n-np)$$

の分布関数は，$B(n,p)$ を標準化したものとなる．故に，定理 1.12 より，Z_n の分布関数は，n が大きいとき標準正規分布 $N(0,1)$ と考えてよい．Z_n は

$$Z_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad Y_i=\frac{X_i-p}{\sqrt{np(1-p)}}$$

と書け，$EY_i=0$ で，n が大きいとき Y_i は小さくなる．このように，偏りのない小さな量が多数独立にたしあわされた偶然量は，正規分布関数をもつものと考えてよい．測定誤差はこの例である．

1.8 ランダム・ウォーク

$X_1,\cdots,X_n$ は独立な確率変数列で

$$P(X_i=1)=P(X_i=-1)=\frac{1}{2} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

を満すものとする．このとき，

$$S_0=0$$
$$S_i=\sum_{j=1}^{i} X_j \qquad (i=1,\cdots,n)$$

によって定義される確率変数列 $S_0,S_1,\cdots,S_n$ を（n ステップ）**ランダム・ウォーク**と呼ぶ．また，

$T_i = \max\{S_0, S_1, \cdots, S_i\}$

$(i=1, \cdots, n)$

と定義する.

〔定理 1.13〕（鏡像の原理）

$a \geqq 0$, $a \geqq b$ を満す任意の整数 a, b に対して

$$P(T_n \geqq a,\ S_n = b) = P(S_n = 2a-b)$$

が成立する.

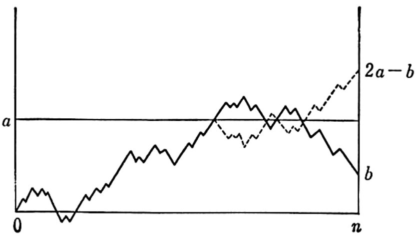


図 1.5　鏡像の原理

証明：確率空間 (Ω, P) を

$$\Omega = \{-1, 1\}^n$$

$$P(\omega) = 2^{-n} \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

と定義し，確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$ を

$$X_i((\omega_1, \cdots, \omega_n)) = \omega_i \qquad (i=1, \cdots, n)$$

と定義すると，これは

$$P(X_i=1) = P(X_i=-1) = \frac{1}{2}$$

を満す独立確率変数列となる．S_i, T_i を上記のように定義する．事象 $\{T_n \geqq a, S_n = b\}$ に属す ω に対して，$\tilde{\omega}$ を

$$\tilde{\omega}(i) = \begin{cases} \omega(i) & (i \leqq \tau(\omega)) \\ -\omega(i) & (i > \tau(\omega)) \end{cases}$$

と定義する．ただし，

$$\tau(\omega) = \min\{i; S_i(\omega) \geqq a\}$$

とおいた．このとき，対応 $\omega \longmapsto \tilde{\omega}$ は，事象 $\{T_n \geqq a,\ S_n = b\}$ から事象 $\{S_n = 2a-b\}$ の上への 1 対 1 対応となっている．故に，

$$P(T_n \geqq a, S_n = b) = P(S_n = 2a-b)$$

が成立する.　　（証明終）

〔定理 1.14〕　任意の整数 $a \geqq 0$ に対して

$$P(T_n \geqq a) = P(S_n > a) + P(S_n \geqq a)$$

が成立する．これより

$$P(T_n = a) = P(S_n \in \{a, a+1\})$$
$$= 2^{-n}\binom{n}{\left[\frac{n+a+1}{2}\right]}$$

が導かれる（[　] はガウス記号）．

証明：定理 1.13 より

$$\begin{aligned} P(T_n \geqq a) &= P(S_n > a) + P(T_n \geqq a,\ \ S_n \leqq a) \\ &= P(S_n > a) + \sum_{b \leqq a} P(T_n \geqq a,\ \ S_n = b) \\ &= P(S_n > a) + \sum_{b \leqq a} P(S_n = 2a - b) \\ &= P(S_n > a) + P(S_n \geqq a) \end{aligned}$$

が成立する．また，これを用いて

$$\begin{aligned} P(T_n = a) &= P(T_n \geqq a) - P(T_n \geqq a+1) \\ &= P(a < S_n \leqq a+1) + P(a \leqq S_n < a+1) \\ &= P(S_n \in \{a, a+1\}) \end{aligned}$$

を得る．最後に，$b = -n, -n+1, \cdots, n$ に対して

$$P(S_n = b) = \begin{cases} 2^{-n}\binom{n}{\frac{n+b}{2}} & (b \equiv n \pmod 2) \\ 0 & (b \not\equiv n \pmod 2) \end{cases}$$

だから

$$P(T_n = a) = P(S_n \in \{a, a+1\})$$
$$= 2^{-n}\binom{n}{\left[\frac{n+a+1}{2}\right]}$$

が成立する．　（証明終）

確率変数 R を

$$R=\min\{0<i\leqq n;\ \ S_i=0\}$$

と定義する．明らかに，R は偶数となる．ただし，$S_i=0$ となるような i $(0<i\leqq n)$ が存在しないときは，$R=\infty$ と定義する．

〔定理 1.15〕　$i=1,\cdots,[n/2]$ に対して

$$P(R=2i)=2^{-2i+2}\binom{2i-2}{i-1}-2^{-2i}\binom{2i}{i}$$
$$=P(S_{2i-2}=0)-P(S_{2i}=0)$$

が成立する．

証明： 確率変数列 $S_i'(i=0,1,\cdots,n-1)$ を

$$S_i'=\sum_{j=2}^{i+1}X_j \qquad (S_0'=0)$$

と定義する．このとき，二つの確率変数列 $(S_i)_{i=0,\cdots,n-1}$ と $(S_i')_{i=0,1,\cdots,n-1}$ は同じ分布をもっている．すなわち，任意の $t_0,t_1,\cdots,t_{n-1}$ に対して

$$P(S_0=t_0,S_1=t_1,\cdots,S_n=t_n)=P(S_0'=t_0,S_1'=t_1,\cdots,S_{n-1}'=t_{n-1})$$

が成立する．このとき，事象 $\{R=2i\}$ は

$$\{R=2i\}$$
$$=\{X_1=1,\ \ S_j'\geqq 0\ \ (\forall j=1,\cdots,2i-3),\ \ S_{2i-2}'=0,\ \ X_{2i}=-1\}$$
$$\cup\{X_1=-1,\ \ S_j'\leqq 0\ \ (\forall j=1,\cdots,2i-3),\ \ S_{2i-2}'=0,\ \ X_{2i}=1\}$$

と書ける．また，X_1，X_{2i} および確率変数 $(S_j';\ j=1,\cdots,2i-2)$ は独立となる．故に，定理 1.13 および対称性より

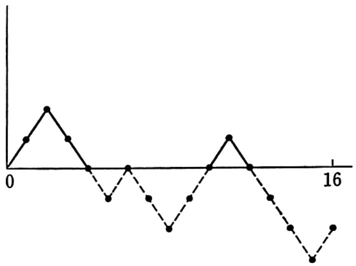
$$P(R=2i)=\frac{1}{4}P(S_j'\geqq 0\ \ (\forall j=1,\cdots,2i-3),\ \ S_{2i-2}'=0)$$
$$+\frac{1}{4}P(S_j'\leqq 0\ \ (\forall j=1,\cdots,2i-3),\ \ S_{2i-2}'=0)$$
$$=\frac{1}{2}P(S_j\leqq 0\ \ (\forall j=1,\cdots,2i-3),\ \ S_{2i-2}=0)$$
$$=\frac{1}{2}P(T_{2i-2}=0,\ \ S_{2i-2}=0)$$
$$=\frac{1}{2}P(T_{2i-2}\geqq 0,\ \ S_{2i-2}=0)-\frac{1}{2}P(T_{2i-2}\geqq 1,\ \ S_{2i-2}=0)$$

$$=\frac{1}{2}P(S_{2i-2}=0)-\frac{1}{2}P(S_{2i-2}=2)$$

$$=2^{-2i+1}\binom{2i-2}{i-1}-2^{-2i+1}\binom{2i-2}{i}$$

$$=P(S_{2i-2}=0)-P(S_{2i}=0)$$

を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)



$U_{16}=6,\quad V_{16}=10$

図 1.6

各 $i=1,\cdots,n$ に対して，座標平面上の2点 $(i-1,\ S_{i-1})$ と $(i,\ S_i)$を線分で結び，ランダム・ウォークのグラフを描く．ここで，横軸は時刻，縦軸は位置を表すものとする．このとき，$S_{i-1}+S_i$ の正負に対応して，時刻 $i-1$ から i までのグラフは正または負の領域にある．グラフが正の領域にある総時間 U_n と負の領域にある総時間 V_n は

$$U_n=\sum_{i=1}^{n}1_{S_{i-1}+S_i>0}$$

$$V_n=\sum_{i=1}^{n}1_{S_{i-1}+S_i<0}$$

$$U_n+V_n=n$$

を満す．さらに，偶数 $2n$ に対する U_{2n} と V_{2n} は偶数となる．確率変数 U_{2n} の分布を求めよう．

〔定理 1.16〕　$k=0,1,\cdots,n$ に対して

$P(U_{2n}=2k)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-k}P(U_{2n-2i}=2k)P(R=2i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}P(U_{2n-2i}=2k-2i)P(R=2i)$$

が成立する（ただし，$U_0=0$）．また，

$$P(S_{2n}=0)=\sum_{i=1}^{n}P(R=2i)P(S_{2n-2i}=0)$$

が成立する．

証明： 各 $i=1, \cdots, n$ に対して

$$S_j{}^{(2i)}=\sum_{l=1}^{j} X_{2i+l} \qquad (j=0, 1, \cdots, 2n-2i)$$

$$U_{2n-2i}^{(2i)}=\sum_{j=1}^{2n-2i} 1_{S_{j-1}{}^{(2i)}+S_j{}^{(2i)}>0}$$

と定義する．このとき，確率変数 $S_{2n-2i}^{(2i)}$ と S_{2n-2i}，$U_{2n-2i}^{(2i)}$ と U_{2n-2i} は同分布をもち，確率変数 $S_{2n-2i}^{(2i)}$ または $U_{2n-2i}^{(2i)}$ と $(X_1,\ 1_{R=2i})$ は独立となる．故に，事象 $\{U_{2n}=2k\}$ は

$$\begin{aligned}
&\{U_{2n}=2k\}\\
&=\bigcup_{i=1}^{n-k}\{X_1=-1, R=2i, U_{2n-2i}^{(2i)}=2k\}\\
&\quad\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{X_1=1, R=2i, U_{2n-2i}^{(2i)}=2k-2i\}
\end{aligned}$$

と書けるから

$$\begin{aligned}
&P(U_n=2k)\\
&=\sum_{i=1}^{n-k}P(X_1=-1,\ \ R=2i)P(U_{2n-2i}=2k)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k}P(X_1=1,\ \ R=2i)P(U_{2n-2i}=2k-2i)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-k}P(U_{2n-2i}=2k)P(R=2i)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}P(U_{2n-2i}=2k-2i)P(R=2i)
\end{aligned}$$

が成立する．また，事象 $\{S_{2n}=0\}$ は

$$\{S_{2n}=0\}=\bigcup_{i=1}^{n}\{R=2i,\ \ S_{2n-2i}^{(2i)}=0\}$$

と書けるから，

$$P(S_{2n}=0)=\sum_{i=1}^{n}P(R=2i)P(S_{2n-2i}=0)$$

が成立する． (証明終)

〔定理 1.17〕 $k=0, 1, \cdots, n$ に対して

$$P(U_{2n}=2k)=2^{-2n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$$

が成立する．

証明： n に関する帰納法を用いる．$n=0$ のとき，上式は自明に成立する．n より小さい自然数に対して，上式が成立すると仮定する．このとき

$$P(S_{2j}=0)=2^{-2j}\binom{2j}{j}$$

に注意して，定理 1.16 と帰納法の仮定より

$$
\begin{aligned}
&P(U_{2n}=2k)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-k}P(U_{2n-2i}=2k)P(R=2i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}P(U_{2n-2i}=2k-2i)P(R=2i)\\
&=2^{-2k-1}\binom{2k}{k}\sum_{i=1}^{n-k}P(S_{2n-2k-2i}=0)P(R=2i)\\
&\quad+2^{-2n+2k-1}\binom{2n-2k}{n-k}\sum_{i=1}^{k}P(S_{2k-2i}=0)P(R=2i)\\
&=2^{-2k-1}\binom{2k}{k}P(S_{2n-2k}=0)+2^{-2n+2k-1}\binom{2n-2k}{n-k}P(S_{2k}=0)\\
&=2^{-2n-1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}+2^{-2n-1}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k}\\
&=2^{-2n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}
\end{aligned}
$$

となり，上式は n に対しても成立する．　　　　　　（証明終）

〔**定理 1.18**〕（アークサイン法則）

$$\lim_{n\to\infty}P(U_n\leqq nx)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\qquad(0\leqq x\leqq 1)$$

が成立する．すなわち，確率変数 U_n/n の分布関数は，$n\to\infty$ のとき，分布関数 $2/\pi\cdot\arcsin\sqrt{x}$（ただし，$x<0$ に対しては 0，$x>1$ に対しては 1 と考える）に弱収束する．

証明： $0<x<1$ としてよい．このとき，$0<a<x<b<1$ となる a,b をとる．定理 1.10 と 1.17 より

$$
\begin{aligned}
&P(2na<U_{2n}\leqq 2nx)\\
&=\sum_{2na<2k\leqq 2nx}\sqrt{\frac{2k}{2\pi k^2}}\sqrt{\frac{2(n-k)}{2\pi(n-k)^2}}(1+o(1))\\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{a<\frac{k}{n}\leqq x}\sqrt{\frac{1}{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}}\cdot\frac{1}{n}(1+o(1))\\
&=\frac{1}{\pi}\int_a^x\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}(1+o(1))
\end{aligned}
$$

が成立する．ここで，$o(1)$ は $n\to\infty$ のとき，k に関して一様に 0 に収束する項である．これより

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}P(2na<U_{2n}\leqq 2nx)&=\frac{1}{\pi}\int_a^x\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}\\
&=\frac{2}{\pi}(\arcsin\sqrt{x}-\arcsin\sqrt{a})
\end{aligned}
$$

を得る．同様にして

$$
\lim P(2nx<U_{2n}\leqq 2nb)=\frac{2}{\pi}(\arcsin\sqrt{b}-\arcsin\sqrt{x})
$$

を得る．故に，

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}&=\lim_{a\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}P(2na<U_{2n}\leqq 2nx)\\
&\leqq\varliminf_{n\to\infty}P(U_{2n}\leqq 2nx)\\
&\leqq\varlimsup_{n\to\infty}P(U_{2n}\leqq 2nx)\\
&=1-\varliminf_{n\to\infty}P(U_{2n}>2nx)\\
&\leqq 1-\lim_{b\uparrow 1}\lim_{n\to\infty}P(2nx<U_{2n}\leqq b)\\
&=1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{x}\right)\\
&=\arcsin\sqrt{x}
\end{aligned}
$$

となり

$$
\lim_{n\to\infty}P(U_{2n}\leqq 2nx)=\arcsin\sqrt{x}
$$

が成立する．また，

$$U_{2n} \leqq U_{2n+1} \leqq U_{2n}+1$$

だから

$$\lim_{n\to\infty} P(U_{2n+1} \leqq (2n+1)x) = \arcsin\sqrt{x}$$

が成立し，定理 1.18 は証明された． (証明終)

分布関数 $2/\pi \cdot \arcsin\sqrt{x}$ は，密度

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \qquad (0<x<1)$$

をもっている．図 1.7 のように，この関数のグラフは $x=1/2$ に関して対称で，両端 $x=0$ と $x=1$ に近づくに従い限りなく増加する．このことは，1/2 の確率で 1 または -1 の支払いを受ける賭けを長時間繰返し行なう場合，それまでに受けた支払いの総和が正となっている時間の割合は，1 または 0 の近くに偏る傾向があることを意味する．すなわち，得をしている時間が圧倒的に多いか，または，損をしている時間が圧倒的に多いというようになりがちである．これは，「つき」に対応するものであると説明されることもあるが，妥当ではない．なぜなら，「つき」は，受けた支払いの総和そのものではなく，それの増減に関する概念だから．累計は負でも，増加している状態は，「ついている」状態なのだ．

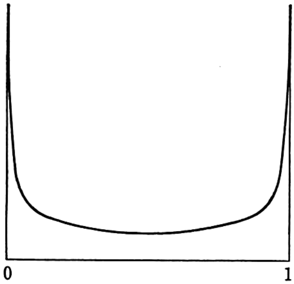


図 1.7 $y=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ のグラフ

1.9 マルコフ列とマルコフ時刻

Σ は空でない有限集合，$\Omega=\Sigma^{\{0,1,\cdots,n\}}$ とする．Ω の元 ω は $(\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n)$ と書かれる．Σ の元を添字とする実数上の行ベクトル $(\pi_a)_{a\in\Sigma}$ が**確率ベクトル**であるとは，

(1) $0 \leqq \pi_a \leqq 1 \qquad (\forall a \in \Sigma)$

(2) $\sum_{a\in\Sigma} \pi_a = 1$

が成立することをいう．また，$\Sigma\times\Sigma$ の元を添字とする実数上の正方行列は，それの各行ベクトルが確率ベクトルのとき**確率行列**と呼ばれる．

確率ベクトル π と確率行列 $M_1, \cdots, M_n$ が与えられたとき，Ω 上の確率測度 P を

$$P(\omega)=\pi_{\omega_0}\prod_{i=1}^{n}m^{i}{}_{\omega_{i-1},\omega_i}$$

と定義する．ここで，

$$\pi=(\pi_a)_{a\in\Sigma}$$
$$M_i=(m^{i}{}_{a,b})_{a,b\in\Sigma} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

とおいた．P が確率測度であることは，

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)&=\sum_{\omega_0,\cdots,\omega_n\in\Sigma}\pi_{\omega_0}m^{1}{}_{\omega_0,\omega_1}m^{2}{}_{\omega_1,\omega_2}\cdots m^{n}{}_{\omega_{n-1},\omega_n}\\&=\sum_{\omega_0,\cdots,\omega_{n-1}\in\Sigma}\pi_{\omega_0}m^{1}{}_{\omega_0,\omega_1}\cdots m^{n-1}_{\omega_{n-2},\omega_{n-1}}\sum_{\omega_n\in\Sigma}m^{n}{}_{\omega_{n-1},\omega_n}\\&=\sum_{\omega_0,\cdots,\omega_{n-1}\in\Sigma}\pi_{\omega_0}m^{1}{}_{\omega_0,\omega_1}\cdots m^{n-1}_{\omega_{n-2},\omega_{n-1}}\\&=\cdots\\&=\sum_{\omega_0\in\Sigma}\pi_{\omega_0}=1\end{aligned}$$

より明らか．

(Ω, P) 上の確率変数 X_i を

$$X_i(\omega)=\omega_i \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

と定義する．

〔**定理 1.19**〕 確率変数列 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ はマルコフ列である．逆に，これがマルコフ列となるような P は，上記のようなものに限る．

証明：任意の $i=2,\cdots,n$ と

$$P(X_0=x_0,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1})>0$$

を満す $x_0,\cdots,x_{i-1}\in\Sigma$ および $x_i\in\Sigma$ に対して

$$P(X_i=x_i\,|\,X_0=x_0,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1})=P(X_i=x_i\,|\,X_{i-1}=x_{i-1})$$

を示せばよい．これは，

$$\begin{aligned}&P(X_i=x_i\,|\,X_0=x_0,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1})\\&=\frac{P(X_0=x_0,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1},X_i=x_i)}{P(X_0=x_0,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1})}\end{aligned}$$

$$=\frac{\pi_{x_0}\prod_{j=1}^{i} m^j{}_{x_{j-1},x_j}}{\pi_{x_0}\prod_{j=1}^{i-1} m^j{}_{x_{j-1},x_j}}=m^i{}_{x_{i-1},x_i}$$

$$P(X_i=x_i|X_{i-1}=x_{i-1})$$
$$=\frac{P(X_{i-1}=x_{i-1},\ X_i=x_i)}{P(X_{i-1}=x_{i-1})}$$
$$=\frac{\sum_{x_0,\cdots,x_{i-2}}\pi_{x_0}\prod_{j=1}^{i} m^j{}_{x_{j-1},x_j}}{\sum_{x_0,\cdots,x_{i-2}}\pi_{x_0}\prod_{j=1}^{i-1} m^j{}_{x_{j-1},x_j}}=m^i{}_{x_{i-1},x_i}$$

から導かれる．逆に，$X_0, X_1, \cdots, X_n$ がマルコフ列だとすると

$$\pi_a=P(X_0=a)$$
$$m^i{}_{a,b}=P(X_i=b|X_{i-1}=a) \qquad (a,b\in\Sigma,\ i=1,\cdots,n)$$

と定義すれば，

$$\pi:=(\pi_a)_{a\in\Sigma}$$
$$M^i:=(m^i{}_{a,b})_{a,b\in\Sigma} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

は確率ベクトルまたは確率行列となる．さらに，マルコフ性より

$$P(\omega)=P(X_0=\omega_0,\cdots,X_n=\omega_n)$$
$$=P(X_0=\omega_0,\cdots,X_{n-1}=\omega_{n-1})P(X_n=\omega_n|X_0=\omega_0,\cdots,X_{n-1}=\omega_{n-1})$$
$$=P(X_0=\omega_0,\cdots,X_{n-1}=\omega_{n-1})P(X_n=\omega_n|X_{n-1}=\omega_{n-1})$$
$$=\ \cdots$$
$$=P(X_0=\omega_0)\prod_{i=1}^{n}P(X_i=\omega_i|X_{i-1}=\omega_{i-1})$$
$$=\pi_{\omega_0}\prod_{i=1}^{n} m^i{}_{\omega_{i-1},\omega_i}$$

が成立する．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

マルコフ列に対して定まる上記の π および M_i $(i=1,\cdots,n)$ を，それぞれ，**初期分布**，**遷移行列**と呼ぶ．また，P を π と M_i $(i=1,\cdots,n)$ から定まる**マルコフ測度**と呼ぶ．$i=1,\cdots,n$ と $x\in\Sigma$ が与えられたとき，$\Omega^{(i)}=\Sigma^{\{i,\cdots,n\}}$ 上に初期分布 δ_x と遷移行列 M_j $(j=i,\cdots,n)$ から定まるマルコフ測度 $P_x{}^i$ を定義する．ただし，$\delta_x=(\delta_{x,y})_{y\in\Sigma}$ で，

$$\delta_{x,y}=\begin{cases}1 & (x=y)\\ 0 & (x\neq y)\end{cases}$$

とする．$X_i, \cdots, X_n$ は確率空間 $(\Omega^{(i)}, P_x{}^i)$ 上の確率変数とも考えられる．明らかに，

$$P(X_i=x_i, \cdots, X_n=x_n \mid X_i=x)=P_x{}^i(X_i=x_i, \cdots, X_n=x_n)$$

が成立する．マルコフ列は，遷移行列 M_i が i に依存しないとき，**定常遷移**であるという．

〔定理 1.20〕 任意の $i=0, 1, \cdots, n$ と $X_0, \cdots, X_i$ のみに関係する事象 A，$X_i, \cdots, X_n$ のみに関係する事象 B，および $P(X_i=x)>0$ となる $x\in\Sigma$ に対して

$$P(A\cap B \mid X_i=x)=P(A\mid X_i=x)P(B\mid X_i=x)$$

が成立する．

証明：

$P(A\cap B\mid X_i=x)$

$$=\frac{\sum_{(x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\in A\cap B}\delta_{x,x_i}\pi_{x_0}\prod_{j=1}^{n}m^j{}_{x_{j-1},x_j}}{P(X_i=x)}$$

$$=\frac{\sum_{(x_0,\cdots,x_i)\in A}\delta_{x,x_i}\pi_{x_0}\prod_{j=1}^{i}m^j{}_{x_{j-1},x_j}\times\sum_{(x_i,\cdots,x_n)\in B}\delta_{x,x_i}\prod_{j=i+1}^{n}m^j{}_{x_{j-1},x_j}}{P(X_i=x)}$$

$$=\frac{P(A, X_i=x)P_x{}^i(B)}{P(X_i=x)}$$

$$=P(A\mid X_i=x)P(B\mid X_i=x)$$ （証明終）

〔定理 1.21〕 任意の $0\leqq k_0<k_1<\cdots<k_m\leqq n$ に対して，確率変数列 $X_{k_i}(i=0, 1, \cdots, m)$ はマルコフ列となる．

証明： 任意の $i=2, \cdots, m$ と

$$P(X_{k_0}=x_{k_0}, \cdots, X_{k_{i-1}}=x_{k_{i-1}})>0$$

となる任意の $x_{k_0}, \cdots, x_{k_{i-1}}\in\Sigma$ および $x_{k_i}\in\Sigma$ に対して

$$P(X_{k_i}=x_{k_i}\mid X_{k_0}=x_{k_0}, \cdots, X_{k_{i-1}}=x_{k_{i-1}})$$

$$=\frac{\displaystyle\sum_{x_j(j\in S)}\pi_{x_0}\prod_{j=1}^{k_i}m^j{}_{x_{j-1},x_j}}{\displaystyle\sum_{x_j(j\in S')}\pi_{x_0}\prod_{j=1}^{k_{i-1}}m^j{}_{x_{j-1},x_j}}=\sum_{x_j(j\in S\setminus S')}\prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i}m^j{}_{x_{j-1},x_j}$$

が成立する．ただし，

$$S=\{0,1,\cdots,k_i\}\setminus\{k_0,k_1,\cdots,k_i\},$$
$$S'=\{0,1,\cdots,k_{i-1}\}\setminus\{k_0,k_1,\cdots,k_{i-1}\}$$

とおいた．同様の計算で

$$P(X_{k_i}=x_{k_i}\,|\,X_{k_{i-1}}=x_{k_{i-1}})=\sum_{x_j(j\in S\setminus S')}\prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i}m^j{}_{x_{j-1},x_j}$$

となり定理 1.21 が証明された．　(証明終)

写像 $\tau:\Omega\to\{0,1,\cdots,n\}$ が**マルコフ時刻**であるとは，任意の $i=0,1,\cdots,n$ に対して

$$\{\omega\in\Omega;\ \tau(\omega)\leqq i\}\in\mathcal{F}_i$$

が成立することをいう．ただし，

$$\mathcal{F}_i=\{A\times\Sigma^{\{i+1,\cdots,n\}};\ A\subset\Sigma^{\{0,\cdots,i\}}\}$$

とおいた．すなわち，$\mathcal{F}_i$ は Ω の部分集合で，それに属するかどうかが $(\omega_0,\cdots,\omega_i)$ のみで決められるようなものの全体である．すなわち，マルコフ時刻 τ は，$\tau(\omega)\leqq i$ であることが $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_i$ のみで決定されるような Ω 上の $\{0,1,\cdots,n\}$ 値関数のことである．$\mathcal{F}_i$ は 1.11 節で定義する集合体である．さらに，

$$\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1\subset\cdots\subset\mathcal{F}_n=\mathcal{P}(\Omega)$$

が成立する．マルコフ時刻 τ が与えられたとき，確率変数 X_τ を

$$X_\tau(\omega)=X_{\tau(\omega)}(\omega)\qquad(\omega\in\Omega)$$

と定義する．

〔定理 1.22〕　τ と σ がマルコフ時刻のとき，$\tau\wedge\sigma$, $\tau\vee\sigma$ はマルコフ時刻となる．また，任意の $i=0,1,\cdots,n$ に対して，$(\tau+i)\wedge n$ もマルコフ時刻である．ただし，

$$\begin{rcases}(\tau\wedge\sigma)(\omega)=\min\{\tau(\omega),\sigma(\omega)\}\\(\tau\vee\sigma)(\omega)=\max\{\tau(\omega),\sigma(\omega)\}\end{rcases}\quad(\omega\in\Omega)$$

証明：$\mathscr{F}_i$ に属す二つの集合の和と積は $\mathscr{F}_i$ に属すから，任意の $i=0, 1, \cdots, n$ に対して

$$\{\tau\wedge\sigma\leqq i\}=\{\tau\leqq i\}\cup\{\sigma\leqq i\}\in\mathscr{F}_i$$
$$\{\tau\vee\sigma\leqq i\}=\{\tau\leqq i\}\cap\{\sigma\leqq i\}\in\mathscr{F}_i$$

となり，$\tau\wedge\sigma$，$\tau\vee\sigma$ はマルコフ時刻となる．また，任意の $j=0, 1, \cdots, n$ に対して

$$\{(\tau+i)\wedge n\leqq j\}=\begin{cases}\phi & (j<i)\\ \{\tau\leqq j-i\} & (i\leqq j<n)\\ \Omega & (j=n)\end{cases}$$

が成立するから，$\mathscr{F}_j$ が j に関して単調増加であることより，$\{(\tau+i)\wedge n\leqq j\}\in\mathscr{F}_j$ となり，$(\tau+i)\wedge n$ はマルコフ時刻となる．（証明終）

〔**定理 1.23**〕（強マルコフ性）　$X_0, X_1, \cdots, X_n$ は定常遷移なマルコフ列とする．τ はマルコフ時刻で $\tau(\omega)\leqq n-m$ $(\forall\omega\in\Omega)$ を満すものとする．ただし，m は $0\leqq m\leqq n$ を満す整数とする．このとき，各 $i=0, 1, \cdots, m$ に対して，確率変数列 $X_{\tau+i}$ $(i=0, 1, \cdots, m)$ はマルコフ列となる．さらに，$P(X_\tau=x)>0$ となる任意の $x\in\Sigma$ と任意の $x_0, x_1, \cdots, x_m\in\Sigma$ に対して

$$P(X_\tau=x_0, X_{\tau+1}=x_1, \cdots, X_{\tau+m}=x_m\,|\,X_\tau=x)$$
$$=P_x{}^0(X_0=x_0, X_1=x_1, \cdots, X_m=x_m) \qquad (\sharp)$$

が成立する．

証明：($\sharp$) を示す．各 $\omega\in\Omega$ に対して，$j=\tau(\omega)$ とおくとき

$$[\omega]_\tau=\{(\omega_0, \cdots, \omega_j)\}\times\Sigma^{\{j+1, \cdots, n\}}$$

と定義する．このとき，任意の $\omega'\in[\omega]_\tau$ に対して $[\omega']_\tau=[\omega]_\tau$ となる．故に，任意の ω と ω' に対して，$[\omega]_\tau\cap[\omega']_\tau=\phi$ または $[\omega]_\tau=[\omega']_\tau$ が成立する．事象 $\{X_\tau=x\}$ は，集合 $[\omega]_\tau$ $(\omega\in\Omega)$ の有限和として表せるから

$$\{X_\tau=x\}=\bigcup_{j=1}^{l}[\omega^j]_\tau$$
$$[\omega^j]_\tau\cap[\omega^k]_\tau=\phi \qquad (\forall j\neq k)$$

とする．$x \neq x_0$ のとき，(#) の両辺とも 0 となり (#) は成立する．故に，$x=x_0$ の場合を考察する．このとき，$h_j=\tau(\omega^j)$ $(j=1, \cdots, l)$ とおくとき，

$$\{X_\tau=x_0, X_{\tau+1}=x_1, \cdots, X_{\tau+m}=x_m\}$$
$$=\bigcup_{j=1}^{l}\{(\omega_0{}^j, \cdots, \omega_{h_j}^j, \ x_1, \cdots, x_m)\}\times\Sigma^{\{h_j+m+1, \cdots, n\}}$$
$$\{X_\tau=x_0\}$$
$$=\bigcup_{j=1}^{l}\{(\omega_0{}^j, \cdots, \omega_{h_j}{}^j)\}\times\Sigma^{\{h_j+1, \cdots, n\}}$$

となるから

$$P(X_\tau=x_0, \cdots, X_{\tau+m}=x_m\,|\,X_\tau=x)$$
$$=\frac{\sum_{j=1}^{l}P(X_0=\omega_0{}^j, \cdots, X_{h_j}=\omega_{h_j}{}^j)P(X_{h_j+1}=x_1, \cdots, X_{h_j+m}=x_m\,|\,X_{h_j}=x)}{\sum_{j=1}^{l}P(X_0=\omega_0{}^j, \cdots, X_{h_j}=\omega_{h_j}{}^j)}$$
$$=\frac{\sum_{j=1}^{l}P(X_0=\omega_0{}^j, \cdots, X_{h_j}=\omega_{h_j}{}^j)P(X_1=x_1, \cdots, X_m=x_m\,|\,X_0=x)}{\sum_{j=1}^{l}P(X_0=\omega_0{}^j, \cdots, X_{h_j}=\omega_{h_j}{}^j)}$$
$$=P(X_1=x_1, \cdots, X_m=x_m\,|\,X_0=x)$$
$$=P(X_0=x_0, X_1=x_1, \cdots, X_m=x_m\,|\,X_0=x)$$
$$=P_x{}^0(X_0=x_0, X_1=x_1, \cdots, X_m=x_m)$$

が成立する．ここでマルコフ列の定常遷移性を用いた．最後に，$X_{\tau+i}$ $(i=0, 1, \cdots, m)$ のマルコフ性を示す．任意の $i=2, \cdots, m$ と

$$P(X_\tau=x_0, \cdots, X_{\tau+i-1}=x_{i-1})>0$$

となる $x_0, \cdots, x_{i-1}\in\Sigma$ および任意の $x_i\in\Sigma$ に対して，(#) と測度 $P_x{}^0$ のマルコフ性より

$$P(X_{\tau+i}=x_i\,|\,X_\tau=x_0, \cdots, X_{\tau+i-1}=x_{i-1})$$
$$=\frac{P(X_{\tau+1}=x_1, \cdots, X_{\tau+i}=x_i\,|\,X_\tau=x_0)P(X_\tau=x_0)}{P(X_{\tau+1}=x_1, \cdots, X_{\tau+i-1}=x_{i-1}\,|\,X_\tau=x_0)P(X_\tau=x_0)}$$
$$=\frac{P_{x_0}{}^0(X_1=x_1, \cdots, X_i=x_i)}{P_{x_0}{}^0(X_1=x_1, \cdots, X_{i-1}=x_{i-1})}$$

$$=P_{x_0}{}^0(X_i=x_i\,|\,X_1=x_1,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1})$$
$$=P_{x_0}{}^0(X_i=x_i\,|\,X_{i-1}=x_{i-1})$$

を得る．ここで，測度 P のマルコフ性と定常遷移性より

$$P_{x_0}{}^0(X_i=x_i\,|\,X_{i-1}=x_{i-1})$$
$$=P(X_i=x_i\,|\,X_0=x_0,\ \ X_{i-1}=x_{i-1})$$
$$=P(X_i=x_i\,|\,X_{i-1}=x_{i-1})$$
$$=P(X_1=x_i\,|\,X_0=x_{i-1})$$
$$=P_{x_{i-1}}{}^0(X_1=x_i)$$

となるが，他方，マルコフ時刻 $\tau+i-1$ と $m=1$ に対して (#) を適用すると

$$P(X_{\tau+i}=x_i\,|\,X_{\tau+i-1}=x_{i-1})=P_{x_{i-1}}{}^0(X_1=x_i)$$

となる．故に，

$$P(X_{\tau+i}=x_i\,|\,X_\tau=x_0,\cdots,X_{\tau+i-1}=x_{i-1})=P(X_{\tau+i}=x_i\,|\,X_{\tau+i-1}=x_{i-1})$$

が成立し，$X_{\tau+i}$ $(i=0,1,\cdots,m)$ はマルコフ列となる．　　　　（証明終）

1.10 マルコフ停止問題

Σ に値をとる定常遷移なマルコフ列 $X_0,X_1,\cdots,X_n$ を考える．確率空間 $\Omega=\Sigma^{\{0,1,\cdots,n\}}$ 上の確率測度は，初期分布 π と遷移行列 M で決定されるが，n を増大させると，確率空間は拡張される．以下においては，n を固定しないで，必要に応じて大きくとれるものとする．むしろ，無限につづくマルコフ列 $X_0,X_1,X_2,\cdots$ を考えているといってよい．これを応じて，確率空間 Ω も $\Sigma^{\{0,1,2,\cdots\}}$ を考えているといってよい．ただし，事象としては，常に，有限個の X_i に関係したものか，または，有限個の X_i に関係した事象の増大列の和か，減少列の積となるものだけを考える．この場合，事象 B の確率は

$$P(B)=\lim_{k\to\infty}P(B_k)$$

と定義する．ただし，B_k $(k=1,2,\cdots)$ は有限個の X_i に関係した事象の増大列もしくは減少列で，B がこれらの和もしくは積となるものを表す．

さて，**利得関数** $G:\Sigma\to\boldsymbol{R}$ が与えられている．これは，マルコフ列を停止させたときの状態に応じて得る利得を意味する．マルコフ時刻 τ をどのように選べば，これによってマルコフ列を停止させたときの利得の期待値 $E(G(X_\tau))$ を最大にできるだろうか．このような τ を**停止問題の解**と呼ぶ．τ を停止問題の解とする．$P(X_\tau=x)>0$ を満す勝手な $x\in\Sigma$ とマルコフ時刻 η が与えられたとき，マルコフ時刻 ξ を

$$\xi(\omega)=\begin{cases} i+\eta((\omega_i,\omega_{i+1},\cdots)) & (X_\tau(\omega)=x,\ \tau(\omega)=i\text{ のとき}) \\ \tau(\omega) & (X_\tau(\omega)\neq x\text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．定理 1.4 と 1.23 より

$$\begin{aligned} &E(G(X_\xi)) \\ &=\sum_y E(G(X_\xi)\,|\,X_\tau=y)P(X_\tau=y) \\ &=\sum_{y\neq x} E(G(X_\tau)\,|\,X_\tau=y)P(X_\tau=y)+E(G(X_\xi)\,|\,X_\tau=x)P(X_\tau=x) \\ &=\sum_{y\neq x} G(y)P(X_\tau=y)+E_x{}^0(G(X_\eta))P(X_\tau=x) \end{aligned}$$

が成立する．ここで，$E_x{}^0$ は確率測度 $P_x{}^0$ に関する期待値を意味する．故に，$E(G(X_\tau))$ の最大性より

$$\sum_{y\neq x} G(y)P(X_\tau=y)+E_x{}^0(G(X_\eta))P(X_\tau=x) \leqq\sum_y G(y)P(X_\tau=y)$$

となるから，

$$E_x{}^0(G(X_\eta))\leqq G(x)$$

が $P(X_\tau=x)>0$ となる任意の $x\in\Sigma$ とマルコフ時刻 η に対して成立する．すなわち，

$$\Theta=\{x\in\Sigma;\ \text{任意のマルコフ時刻 }\eta\text{ に対して }E_x{}^0(G(X_\eta))\leqq G(x)\}$$

とおくとき，$P(X_\tau\in\Theta)=1$ が成立する．

任意の $x\in\Sigma$ に対して，G を集合

$$\{y\in\Sigma; P_x{}^0(X_i=y)>0\quad(\exists i=0,1,\cdots)\}$$

上に制限したときに最大となる点 $u\in\Sigma$ が存在する．このような u は，

$P_u{}^0(X_j=y)>0$ となる任意の $j=0, 1, \cdots$ と $y\in\Sigma$ に対して，定理 1.4 と 1.23 より

$$P_x{}^0(X_{i+j}=y)=\sum_z P_x{}^0(X_i=z)P_x{}^0(X_{i+j}=y\,|\,X_i=z)$$
$$=\sum_z P_x{}^0(X_i=z)P_z{}^0(X_j=y)$$
$$\geqq P_x{}^0(X_i=u)P_u{}^0(X_j=y)>0$$

となる．ただし，i $(i=0, 1, \cdots)$ として

$$P_x{}^0(X_i=u)>0$$

となるものをとった．故に，y も上の集合に属し，$G(y)\leqq G(u)$ が成立する．すなわち，

$$P_u{}^0(X_i=y)>0 \qquad (\exists\, i=0, 1, \cdots)$$

を満す任意の $y\in\Sigma$ に対して，$G(y)\leqq G(u)$ が成立する．これより，任意のマルコフ時刻 η に対して

$$E_u{}^0(G(X_\eta))\leqq G(u)$$

が成立し，$u\in\Theta$ となる．すなわち，任意の $x\in\Sigma$ に対して，$P_x{}^0(X_i\in\Theta)>0$ となる $i=0, 1, \cdots$ が存在する．故に，

$$\delta:=\min_{x\in\Sigma}\max_{0\leq i\leq k} P_x{}^0(X_i\in\Theta)>0$$

となる k が存在する．

定理 1.4，1.20 および 1.23 より

$$P(X_i\notin\Theta(\forall i=0, 1, \cdots, km))$$
$$=\sum_x P(X_i\notin\Theta(\forall i=0, 1, \cdots, km)\,|\,X_{k(m-1)}=x)P(X_{k(m-1)}=x)$$
$$=\sum_x P(X_i\notin\Theta(\forall i=0, \cdots, k(m-1))\,|\,X_{k(m-1)}=x)$$
$$\times P(X_i\notin\Theta(\forall i=k(m-1), \cdots, km)\,|\,X_{k(m-1)}=x)P(X_{k(m-1)}=x)$$
$$=\sum_x P(X_i\notin\Theta(\forall i=0, \cdots, k(m-1))\,|\,X_{k(m-1)}=x)P(X_{k(m-1)}=x)$$
$$\times P_x{}^0(X_i\notin\Theta(\forall i=0, 1, \cdots, k))$$
$$\leqq(1-\delta)P(X_i\notin\Theta(\forall i=0, 1, \cdots, k(m-1)))$$
$$\leqq \cdots \leqq(1-\delta)^m$$

を得る．故に，

$$\lim_{n\to\infty} P(X_i\in\Theta(\exists i=0,1,\cdots,n))=1$$

が成立する．

Θ への**第1到達時刻**を τ_θ と記す．すなわち，マルコフ時刻 τ_θ を

$$\tau_\theta(\omega)=\min\{i;\ \ \omega_i\in\Theta\}$$

と定義する．ただし，$\omega_i\in\Theta$ となる i が存在しない ω に対しては，$\tau_\theta(\omega)=\infty$ とおく．このような確率は，上で示したように0だから無視してよい．

〔定理 1.24〕

（1） マルコフ時刻 τ が停止問題の解とすると，$P(X_\tau\in\Theta)=1$ が成立する．

（2） τ_θ は停止問題の解である．

証明：（1）はすでに証明した．（2）の証明は省略する． （証明終）

この問題を別の視点から眺めてみよう．Σ 上の実数値関数 f は，

$$E_x{}^0(f(X_1))\leqq f(x) \qquad (\forall x\in\Sigma)$$

を満すとき，**優調和**であるといわれ，

$$E_x{}^0(f(X_1))\geqq f(x) \qquad (\forall x\in\Sigma)$$

を満すとき，**劣調和**であるといわれる．また，優調和かつ劣調和のとき，すなわち，

$$E_x{}^0(f(X_1))=f(x) \qquad (\forall x\in\Sigma)$$

のとき，**調和**であるといわれる．利得関数 G に対して

$$\tilde{G}(x)=\sup_{\eta:\text{マルコフ時刻}} E_x{}^0(G(X_\eta))$$

とおく．このとき，

$$G(x)\leqq\tilde{G}(x) \qquad (\forall x\in\Sigma)$$

$$\Theta=\{x\in\Sigma;\ \ G(x)=\tilde{G}(x)\}$$

が成立する．

〔定理 1.25〕 $\tilde{G}$ は優調和で，かつ，$G\leqq f$ を満す任意の優調和関数 f に対して，$\tilde{G}\leqq f$ が成立する．また，

$$\tilde{G}(x)=E_x{}^0(G(X_{\tau_\Theta})) \qquad (\forall x\in\Sigma)$$

が成立する.

証明：$\tau=\tau_\Theta$とおく．定理 1.24 はマルコフ列 $X_i(i=0,1,\cdots)$ の初期分布πを何にとっても成立するから，確率測度 $P_x{}^0(\forall x\in\Sigma)$ に対して適用すると，

$$E_x{}^0(G(X_\tau))\geqq E_x{}^0(G(X_\eta)) \qquad (\forall x\in\Sigma)$$

が任意のマルコフ時刻ηに対して成立する．故に，

$$E_x{}^0(G(X_\tau))=\sup_\eta E_x{}^0(G(X_\eta))=\tilde{G}(x) \qquad (\forall x\in\Sigma)$$

を得る．マルコフ時刻τ'を，$\tau'(\omega)=\min\{i\geqq 1;\ \omega_i\in\Theta\}$ と定義するとき，任意の $x\in\Sigma$ に対して

$$\begin{aligned}
E_x{}^0(\tilde{G}(X_1))&=\sum_y \tilde{G}(y)P_x{}^0(X_1=y)\\
&=\sum_y E_y{}^0(G(X_\tau))P_x{}^0(X_1=y)\\
&=\sum_y E_y{}^1(G(X_{\tau'}))P_x{}^0(X_1=y)\\
&=\sum_y E_x{}^0(G(X_{\tau'})\,|\,X_1=y)P_x{}^0(X_1=y)\\
&=E_x{}^0(G(X_{\tau'}))\\
&\leqq E_x{}^0(G(X_\tau))=\tilde{G}(x)
\end{aligned}$$

となり，$\tilde{G}$は優調和となる．また，$G(x)\leqq f(x)\,(\forall x\in\Sigma)$ を満す任意の優調和関数fを考える．このとき，任意の $x\in\Sigma$ とマルコフ時刻ηに対して，$f(x)\geqq E_x{}^0(f(X_\eta))$ となることが示されれば，

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(x)&=\sup_\eta E_x{}^0(G(X_\eta))\\
&\leqq\sup_\eta E_x{}^0(f(X_\eta))\leqq f(x) \qquad (\forall x\in\Sigma)
\end{aligned}$$

となり，証明が完了する． (証明終)

これを以下で示す.

〔**定理 1.26**〕 fが優調和関数のとき，任意のマルコフ時刻ηに対して

$$f(x)\geqq E_x{}^0(f(X_\eta)) \qquad (\forall x\in\Sigma)$$

が成立する．

証明：定理 1.24 を $G=f$ に対して適用すると，

$$\Theta_f=\{x\in\Sigma;\ f(x)=\sup_\eta E_x{}^0(f(X_\eta))\}$$
$$\tau=\tau_{\Theta_f}$$

とおくとき，

$$E_x{}^0(f(X_\tau))=\sup_\eta E_x{}^0(f(X_\eta)) \qquad (\forall x\in\Sigma)$$

が成立する．故に，定理 1.26 の結論が成り立たないとすると

$$\delta:=\max_{x\in\Sigma}\{E_x{}^0(f(X_\tau))-f(x)\}>0$$

となる．ここで，

$$g(x)=E_x{}^0(f(X_\tau))-f(x) \qquad (x\in\Sigma)$$

とおき，$g(u)=\delta$ を満す $u\in\Sigma$ をとる．明らかに，$u\notin\Theta_f$ である．また，$\tau=\tau_{\Theta_f}$ であることと定理 1.23，および，f が優調和であることより

$$\begin{aligned}
&E_u{}^0(f(X_1))\leqq f(u),\\
&E_u{}^0(E_{X_1}{}^0(f(X_\tau)))\\
&\quad=\sum_{x\in\Sigma}E_x{}^0(f(X_\tau))P_u{}^0(X_1=x)\\
&\quad=\sum_{x\in\Sigma}E_u{}^0(f(X_{\tau'})\,|\,X_1=x)P_u{}^0(X_1=x)\\
&\quad=E_u{}^0(f(X_{\tau'}))=E_u{}^0(f(X_\tau)) \qquad (\tau'=\min\{i\geqq 1;\ \omega_i\in\Theta\})
\end{aligned}$$

を得る．故に，

$$\sum_{x\in\Sigma}g(x)P_u{}^0(X_1=x)=E_u{}^0(g(X_1))\geqq g(u)$$

となる．他方，u についての仮定より

$$g(x)\leqq g(u) \qquad (\forall x\in\Sigma)$$

であるから，$P_u{}^0(X_1=x)>0$ を満す任意の $x\in\Sigma$ に対して，$g(x)=g(u)=\delta$ が成立する．同じ議論を，このような x に対して適用し，さらに，これを繰返すと，

$$P_u{}^0(X_i=x)>0 \qquad (\exists i=0,1,\cdots)$$

となる任意の $x\in\Sigma$ に対して，$g(x)=\delta>0$ となり，$x\notin\Theta_f$ が成立する．

ところが，これは，定理 1.24 の直前に示したように

$$P_{u}{}^{0}(X_i\in\Theta_f)>0$$

となる $i=0,1,\cdots$ が存在することに矛盾する．よって，定理 1.26 は証明された．（証明終）

ここで，応用例を述べる．

$$\Sigma=\{0,1,2,\cdots,15\},\quad \pi=\delta_0,\quad M=(m_{x,y})_{x,y\in\Sigma}$$

$x\leqq 9$ のとき，

$$m_{x,y}=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (y=x+1,\cdots,x+6)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$x\geqq 10$ のとき，$m_{x,y}=\delta_{x,y}$

$$G(x)=\begin{cases}x & (x\leqq 9)\\ 0 & (x\geqq 10)\end{cases}$$

これは，サイコロを何度か振り，その目の和を利得とするものである．ただし，目の和が 10 以上となると，利得は 0 となり，目の和も増えないものとする．この問題に対する Θ を求めよう．明らかに，$x,y\in\Sigma$ が $x<y$ かつ $x\in\Theta$ を満すとき，$y\in\Theta$ となる．故に，ある $x\in\Sigma$ が存在して $\Theta=\{y\in\Sigma;\ x\leqq y\}$ となる．この x を求めよう．明らかに，$4\leqq x\leqq 9$ である．また，$G(x)\geqq E_x{}^0(G(X_1))$ より

$$x\geqq\sum_{y=x+1}^{9}\frac{1}{6}y=\frac{1}{6}\frac{(9-x)(x+10)}{2}$$

となり，$x\geqq 5$ を得る．また，$x-1$ から出発すると，$X_1\in\Theta$ となるから

$$\begin{aligned}x-1&<E_{x-1}{}^0(G(X_{\tau_\Theta}))\\ &=E_{x-1}{}^0(G(X_1))\\ &=\sum_{y=x}^{9}\frac{1}{6}y=\frac{1}{6}\frac{(10-x)(x+9)}{2}\end{aligned}$$

となり，$x<6$ を得る．以上より，$x=5$ となり，$\Theta=\{y\in\Sigma;\ y\geqq 5\}$ と求まる．さらに，

$$\tilde{G}(x)=E_x{}^0(G(X_{\tau_\Theta}))$$

x	$\tilde{G}(x)$
0	6.04
1	6.18
2	6.44
3	6.81
4	5.83
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10～15	0

図 1.8

は図 1.8 のように求まる．

$\tilde{G}$ を求める一般的なアルゴリズムを与えよう．f：$\Sigma\to\boldsymbol{R}$ に対して，$H(f)$：$\Sigma\to\boldsymbol{R}$ を

$$H(f)(x)=\max\{f(x),\ E_x{}^0(f(X_1))\}$$

と定義する．明らかに，$H(f)\geqq f$ で，$H(f)=f$ となることと f が優調和であることは同値となる．故に，$G\leqq\tilde{G}$ で $\tilde{G}$ が優調和だから

$$G\leqq H(G)\leqq H(\tilde{G})=\tilde{G}$$

となり，これを繰返すことにより

$$G=H^0(G)\leqq H^1(G)\leqq H^2(G)\leqq\cdots\leqq\tilde{G}$$

となる．ただし，

$$H^i(G)=\underbrace{H\circ\cdots\circ H}_{i}(G)$$

とおいた．

〔定理 1.27〕

$$\tilde{G}(x)=\lim_{i\to\infty}H^i(G)(x)\qquad(x\in\Sigma)$$

が成立する．とくに，ある $i=0,1,\cdots$ に対して $H^i(G)=H^{i+1}(G)$ が成立するなら，$\tilde{G}=H^i(G)$ となる．

証明：任意の $x\in\Sigma$ に対して，$H^i(G)(x)$ は i に関して（広義）単調増加で上に有界だから

$$G'(x):=\lim_{i\to\infty}H^i(G)(x)$$

は存在する．また，

$$H(G')(x)=\lim_{i\to\infty}H^{i+1}(G)(x)=G'(x)\qquad(\forall x\in\Sigma)$$

より，G' は優調和となる．さらに，$G\leqq G'\leqq\tilde{G}$ だから定理 1.25 より $G'=\tilde{G}$ となる．後半は $H^i(G)=H^{i+1}(G)$ のとき，$H^i(G)=H^j(G)$ が任意の $j\geqq i$ に対して成立することより，前半の結果から導かれる．(証明終)

先の例だと，$\tilde{G}=H^5(G)$ が成立する．しかし，この例で，$m_{10,j}$ のみを

$$m_{10,j}=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (j=1,2,\cdots,6)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

と変更する．すなわち，目の和が 10 になれば振り出しに戻るということにすれば，状況は変ってくる．まず，

$$\Theta=\{6,7,8,9,11,12,13,14,15\}$$

となり，また，$H^i(G)=\tilde{G}$ となる i は存在しない．

1.11 集合体と条件付期待値

集合 Ω の部分集合からなる族 $\mathcal{A}$ が Ω 上の**集合体**であるとは，

（1） $\phi\in\mathcal{A}$

（2） $A\in\mathcal{A}$ のとき，$A^c\in\mathcal{A}$ $(A^c\in\Omega\backslash A)$

（3） $A,B\in\mathcal{A}$ のとき，$A\cup B\in\mathcal{A}$

が成立することをいう．このとき，

（4） $\Omega\in\mathcal{A}$

（5） $A,B\in\mathcal{A}$ のとき，$A\cap B\in\mathcal{A}$

（6） $A,B\in\mathcal{A}$ のとき，$A\backslash B\in\mathcal{A}$

が成立する．明らかに，$\mathcal{P}(\Omega)$ は集合体である．また，$\{\phi,\Omega\}$ も集合体である．これらは，Ω 上の集合体の中で，それぞれ，最大または最小のものである．さらに，$\mathcal{B}$ が集合 E 上の集合体で，X が Ω から E への写像のとき，$\{X^{-1}(B);\ B\in\mathcal{B}\}$ は Ω 上の集合体となる．とくに，Ω が有限集合で $\mathcal{B}=\mathcal{P}(E)$ のとき，この集合体を **X の生成する集合体**と呼ぶ．

(Ω,P) を有限確率空間とする．Ω 上の集合体 $\mathcal{A}$ が与えられたとき，$\mathcal{A}$ に属す空でない集合 A が $\mathcal{A}$ の**原子**であるとは，$\phi\neq B\subsetneqq A$ となる $\mathcal{A}$ の元 B が存在しないことをいう．$\mathcal{A}$ の原子の全体は，Ω の分割となる．この分割を **$\mathcal{A}$ に対応する分割**と呼ぶ．Ω 上の二つの集合体 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が一致するための必要十分条件は，それぞれに対応する分割が一致することである．また，$\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ となることは，$\mathcal{B}$ に対応する分割が $\mathcal{A}$ に対応

する分割の細分であることと同値である．ただし，Ωの分割ξがηの細分であるとは，ηの各元がξの元の和となることを意味する．例えば，1.9節でマルコフ時刻を定義したときの$\mathcal{F}_i$は集合体である．$\mathcal{F}_i$に対応するΩの分割は

$$\{\Omega_{(x_0,\cdots,x_i)};\quad (x_0,\cdots,x_i)\in\Sigma^{\{0,\cdots,i\}}\}$$

となる．ただし，

$$\Omega_{(x_0,\cdots,x_i)}=\{\omega\in\Omega;\ \omega_j=x_j(\forall j=0,\cdots,i)\}$$

とおいた．

$\mathcal{A}$をΩ上の集合体とする．事象Bと実数値確率変数Xが与えられたとき，確率変数$P(B|\mathcal{A})$および$E(X|\mathcal{A})$を

$$\left.\begin{aligned}P(B|\mathcal{A})(\omega)&=P(B|\mathcal{A}(\omega))\\E(X|\mathcal{A})(\omega)&=E(X|\mathcal{A}(\omega))\end{aligned}\right.\qquad(\omega\in\Omega)$$

と定義する．ただし，$\mathcal{A}(\omega)$はωが属す$\mathcal{A}$の原子を意味する．これらを，それぞれ，**集合体$\mathcal{A}$に関する条件付確率**または**条件付期待値**と呼ぶ．以下，主に$E(X|\mathcal{A})$について論じるが，$P(B|\mathcal{A})=E(1_B|\mathcal{A})$だから，$P(B|\mathcal{A})$についての結果は$E(X|\mathcal{A})$についての結果から導かれる．1.3節で定義した$E(X|Y)$は，$Y$が生成する集合体を$\mathcal{A}$とするとき，$E(X|\mathcal{A})$と等しくなる．

Ω上の集合体$\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$が与えられたとき，$\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$は再び集合体となる．$\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$は集合体とは限らないが，これを含む最小の集合体が存在する．これを$\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$と書く．$\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$の原子の全体は，$\mathcal{A}$の原子$A$と$\mathcal{B}$の原子$B$で$A\cap B$が空でないようなものの$A\cap B$の全体と一致する．$\Omega_0\subset\Omega$のとき，$\mathcal{A}$の$\Omega_0$への**制限**$\mathcal{A}\cap\Omega_0$とは，$\Omega_0$上の集合体$\{A\cap\Omega_0;\ A\in\mathcal{A}\}$のことである．確率変数$X$と$\Omega$上の集合体$\mathcal{A}$が与えられたとき，$X$が**$\mathcal{A}$可測**であるとは，$X$の生成する集合体が$\mathcal{A}$に含まれることを意味する．このことは，$X$が$\mathcal{A}$の任意の原子上で一定値となることと同値である．

例えば，1.9節で定義したΩ上のマルコフ測度Pと集合体$\mathcal{F}_i(i=0,1,\cdots,n)$を考える．このとき，任意の実数値確率変数$X$に対して

$$E(X|\mathcal{F}_i)(\omega)$$
$$=\sum_{x_{i+1},\cdots,x_n\in\Sigma} X(\omega_0,\cdots,\omega_i,x_{i+1},\cdots,x_n)m^{i+1}_{\omega_i,x_{i+1}}\prod_{j=i+2}^{n} m^j{}_{x_{j-1},x_j}$$

が成立する.

〔**定理 1.28**〕 X は実数値確率変数，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は Ω 上の集合体とする．このとき，

（1） $E(X|\{\phi,\Omega\})=E(X)$

（2） $E(X|\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ 可測となる.

（3） X が $\mathcal{A}$ 可測であることと，$E(X|\mathcal{A})=X$ となることは同値である.

（4） $\mathcal{A}\supset\mathcal{B}$ のとき，$E(E(X|\mathcal{A})|\mathcal{B})=E(X|\mathcal{B})$ が成立する．とくに，$E(E(X|\mathcal{A}))=E(X)$ となる.

証明：

（1） 集合体 $\{\phi,\Omega\}$ に対応する分割が $\{\Omega\}$ であることより明らか.

（2） 定義より $E(X|\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ の原子上で一定値となることから明らか.

（3） $E(X|\mathcal{A})=X$ のとき，（2）より X は $\mathcal{A}$ 可測となる．逆に，X が $\mathcal{A}$ 可測のとき，X は $\mathcal{A}$ の原子上一定値だから，任意の $\omega\in\Omega$ に対して

$$E(X|\mathcal{A})(\omega)=E(X|\mathcal{A}(\omega))$$
$$=\frac{\sum_{\omega'\in\mathcal{A}(\omega)} X(\omega')P(\omega')}{P(\mathcal{A}(\omega))}=\frac{X(\omega)\sum_{\omega'\in\mathcal{A}(\omega)} P(\omega')}{P(\mathcal{A}(\omega))}$$
$$=X(\omega)$$

が成立し，$E(X|\mathcal{A})=X$ となる.

（4） $\mathcal{A}\supset\mathcal{B}$ のとき，任意の $\omega\in\Omega$ に対して，$\mathcal{B}(\omega)$ は $\mathcal{A}$ の原子の和となるから

$$\mathcal{B}(\omega)=\bigcup_{i=1}^{k}\mathcal{A}(\omega^i)$$
$$\mathcal{A}(\omega^i)\cap\mathcal{A}(\omega^j)=\phi \qquad (i\neq j)$$

とする．このとき，定理 1.4 を用いて

$$
\begin{aligned}
&E(E(X|\mathcal{A})\,|\,\mathcal{B})\,(\omega)\\
&\quad=E(E(X|\mathcal{A})\,|\,\mathcal{B}(\omega))\\
&\quad=\sum_{i=1}^{k}E(E(X|\mathcal{A})\,|\,\mathcal{A}(\omega^i))\,P(\mathcal{A}(\omega^i)\,|\,\mathcal{B}(\omega))\\
&\quad=\sum_{i=1}^{k}E(X|\mathcal{A}(\omega^i))\,P(\mathcal{A}(\omega^i)\,|\,\mathcal{B}(\omega))\\
&\quad=E(X|\mathcal{B}(\omega))
\end{aligned}
$$

を得る．故に，$E(E(X|\mathcal{A})\,|\,\mathcal{B})=E(X|\mathcal{B})$ が成立する．後半は，$\mathcal{B}=\{\phi,\Omega\}$ とすれば，前半より導かれる． (証明終)

〔**定理 1.29**〕 X, Y は実数値確率変数で，$\mathcal{A}$ は Ω 上の集合体，$c\in\boldsymbol{R}$ とする．このとき，

（1） $E(cX|\mathcal{A})=cE(X|\mathcal{A})$

（2） $E(X+Y|\mathcal{A})=E(X|\mathcal{A})+E(Y|\mathcal{A})$

（3） $X\geqq 0$ のとき，$E(X|\mathcal{A})\geqq 0$

（4） $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が下に凸な関数のとき，$E(f(X)\,|\,\mathcal{A})\geqq f(E(X|\mathcal{A}))$

が成立する．

証明：（1）～（3）は明らか．

（4） 任意の $\omega\in\Omega$ をとり

$$\mathcal{A}(\omega)=\{\omega^1, \cdots, \omega^k\}$$

とするとき，f が下に凸だから

$$
\begin{aligned}
E(f(X)\,|\,\mathcal{A})\,(\omega)&=\frac{\sum_{i=1}^{k}f(X(\omega^i))\,P(\omega^i)}{\sum_{i=1}^{k}P(\omega^i)}\\
&\geqq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}X(\omega^i)\,P(\omega^i)}{\sum_{i=1}^{k}P(\omega^i)}\right)=f(E(X|\mathcal{A})\,(\omega))
\end{aligned}
$$

となり（4）が示された．ただし，$P(\mathcal{A}(\omega))=0$ の場合は，この不等式が成立するよう条件付期待値を定めることとする． (証明終)

〔**定理 1.30**〕 Ω 上の集合体 $\mathcal{A}$ が与えられている．このとき，実数

値確率変数 X と $\mathcal{A}$ 可測な実数値確率変数 Y に対して

$$E(XY|\mathcal{A})=YE(X|\mathcal{A})$$

が成立する.

証明：任意の $\omega\in\Omega$ をとり

$$\mathcal{A}(\omega)=\{\omega^1, \cdots, \omega^k\}$$

とするとき, Y が $\mathcal{A}(\omega)$ 上一定値だから

$$\begin{aligned}E(XY|\mathcal{A})(\omega)&=E(XY|\mathcal{A}(\omega))\\&=\frac{\sum_{i=1}^{k}X(\omega^i)Y(\omega^i)P(\omega^i)}{\sum_{i=1}^{k}P(\omega^i)}\\&=Y(\omega)\frac{\sum_{i=1}^{k}X(\omega^i)P(\omega^i)}{\sum_{i=1}^{k}P(\omega^i)}=Y(\omega)E(X|\mathcal{A})(\omega)\end{aligned}$$

となり, 定理 1.30 が成立する. (証明終)

確率変数 $X(\omega)$ を観測することは, ω が何であるかについての部分的な情報を得ることになる. 例えば, 観測値が x のとき, ω は $X^{-1}(x)$ に属すことがわかる. $\# X^{-1}(x)$ が小さければ, それだけ得られる情報は大きく, 逆に $\# X^{-1}(x)$ が大きければあいまいさが多く残ることになる. とくに, $X^{-1}(x)$ が 1 点集合のとき, ω は確定する. すなわち, 確率変数 X のもたらす情報は, X に対応する分割が細かいほど大きく, また, X の生成する集合体が大きいほど大きい.

1.12 マルチンゲール

(Ω, P) を有限な確率空間とし, Ω 上の集合体の増大列 $\mathcal{B}_0\subset\mathcal{B}_1\subset\cdots\subset\mathcal{B}_n$ が与えられている. 実数値確率変数列 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ が**集合体の増大列** $(\mathcal{B}_i;\ i=0, 1, \cdots, n)$ **に適合**しているとは, 各 i に対して, X_i が $\mathcal{B}_i$ 可測となることを意味する. $(\mathcal{B}_i;\ i=0, \cdots, n)$ に適合している確率変数列 $(X_i;\ i=0, \cdots, n)$ が**マルチンゲール**であるとは,

$$E(X_{i+1}|\mathcal{B}_i)=X_i \qquad (\forall i=0, \cdots, n-1)$$

が成立することをいう．また，

$$E(X_{i+1}|\mathcal{B}_i) \geqq X_i \qquad (\forall i=0, \cdots, n-1)$$

または

$$E(X_{i+1}|\mathcal{B}_i) \leqq X_i \qquad (\forall i=0, \cdots, n-1)$$

が成立するとき，それぞれ，**劣マルチンゲール**，または，**優マルチンゲール**と呼ぶ．

明らかに，符号を変えることにより，劣マルチンゲールは優マルチンゲールとなり，優マルチンゲールは劣マルチンゲールとなる．また，マルチンゲールの一次結合は，再び，マルチンゲールとなる．さらに，定理 1.28（4）より，$(X_i;\ i=0, \cdots, n)$ がマルチンゲールのとき

$$X_i = E(X_n|\mathcal{B}_i) \qquad (\forall i=0, \cdots, n)$$

が成立する．

〔定理 1.31〕 $(X_i;\ i=0, \cdots, n)$ がマルチンゲールで，$f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が下に凸な関数のとき，$(f(X_i);\ i=0, \cdots, n)$ は劣マルチンゲールとなる．

証明：定理 1.29（4）より

$$E(f(X_{i+1})|\mathcal{B}_i) \geqq f(E(X_{i+1}|\mathcal{B}_i)) = f(X_i) \qquad (\forall i=0, \cdots, n-1)$$

が成立し，$(f(X_i);\ i=0, \cdots, n)$ は劣マルチンゲールとなる．（証明終）

〔定理 1.32〕（最大不等式） $(X_i;\ i=0, \cdots, n)$ を劣マルチンゲールとし

$$M(\omega) = \max_{0 \leqq i \leqq n} X_i(\omega) \qquad (\omega \in \Omega)$$

と定義するとき，任意の $c>0$ に対して

$$P(M \geqq c) \leqq \frac{1}{c} E(X_n 1_{M \geqq c})$$

が成立する．とくに，$(X_i;\ i=0, \cdots, n)$ がマルチンゲールのとき，任意の $c>0$ に対して

$$P\left(\max_{0 \leqq i \leqq n} |X_i| \geqq c\right) \leqq \frac{1}{c} E(|X_n|)$$

となる．

証明：

$B_0=\{\omega;\ X_0(\omega)\geqq c\}$

$B_i=\{\omega;\ X_0(\omega)<c, \cdots, X_{i-1}(\omega)<c,\ X_i(\omega)\geqq c\} \qquad (i=1, \cdots, n)$

と定義する．このとき，$B_0, \cdots, B_n$ は互いに共通部分をもたず，

$$\{M\geqq c\}=\bigcup_{i=0}^{n} B_i$$

が成立する．また，$B_i\in\mathcal{B}_i$ $(i=0, \cdots, n)$ だから，1_{B_i} は$\mathcal{B}_i$ 可測となり，定理 1.30 より

$$\begin{aligned}E(X_n 1_{B_i}|\mathcal{B}_i)&=E(X_n|\mathcal{B}_i)1_{B_i}\\&\geqq X_i\cdot 1_{B_i} \qquad (\forall i=0, \cdots, n)\end{aligned}$$

が成立する．故に，定理 1.28 (4) を用いて

$$\begin{aligned}P(M\geqq c)&=\sum_{i=0}^{n} P(B_i)\\&\leqq\sum_{i=0}^{n} E\left(\frac{1}{c}X_i 1_{B_i}\right)\\&\leqq\frac{1}{c}\sum_{i=0}^{n} E(E(X_n 1_{B_i}|\mathcal{B}_i))\\&=\frac{1}{c}\sum_{i=0}^{n} E(X_n 1_{B_i})\\&=\frac{1}{c}E(X_n 1_{M\geqq c})\end{aligned}$$

を得る．後半は，$(|X_i|;\ i=0, \cdots, n)$ が劣マルチンゲールとなることより明らか． (証明終)

実数 $a<b$ と実数列 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ が与えられている．このとき

$$\begin{aligned}&t_0=0\\&t_{2j-1}=\min\{i;\ x_i\leqq a,\ i\geqq t_{2j-2}\}\\&t_{2j}=\min\{i;\ x_i\geqq b,\ i\geqq t_{2j-1}\} \qquad (j=1, 2, \cdots)\end{aligned}$$

と定義する．ただし，空集合 ϕ に対しては，$\min\phi=\infty$ と考える．$t_{2j}<\infty$ となる j の最大値を，実数列 $(x_i;\ i=0, 1, \cdots, n)$ の区間 (a, b) に対する**上向き通過数**と呼ぶ．実数値確率変数列 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ に対しては，確率空間の元 ω を与えると，実数列 $(X_i(\omega);\ i=0, 1, \cdots, n)$ が定まり，

上向き通過数が求まるから，上向き通過数は確率変数となる．

〔**定理 1.33**〕　$(X_i;\ i=0, \cdots, n)$ を劣マルチンゲールとする．実数 $a<b$ に対し，これの上向き通過数を N とするとき

$$E(N) \leqq \frac{1}{b-a} E((X_n - a)_+)$$

が成立する．ただし，

$$(X_n - a)_+ = \max\{X_n - a, 0\}$$

とする．

証明：各 $\omega \in \Omega$ に対して

$$t_0(\omega) = 0$$

$$t_{2j-1}(\omega) = \min\{i;\ X_i(\omega) \leqq a,\ i \geqq t_{2j-2}(\omega)\}$$

$$t_{2j}(\omega) = \min\{i;\ X_i(\omega) \geqq b,\ i \geqq t_{2j-1}(\omega)\} \qquad (j=1, 2, \cdots)$$

と定義するとき

$$N(\omega) = \max\{j;\ t_{2j}(\omega) < \infty\}$$

となる．$j=1, \cdots, n$ に対して，確率変数 ξ_j を，$t_i(\omega) < j$ となる最大の i が偶数のとき $\xi_j(\omega) = 1$ とし，それ以外のとき $\xi_j(\omega) = 0$ と定義する．明らかに，ξ_j は，$X_0, \cdots, X_{j-1}$ で定まるから，$\mathcal{B}_{j-1}$ 可測となる．

このとき，$j=1, \cdots, n$ に対して

$$\begin{aligned} &E(\xi_j(X_j - X_{j-1})) \\ &= E(E(\xi_j(X_j - X_{j-1}) \mid \mathcal{B}_{j-1})) \\ &= E(\xi_j(E(X_j \mid \mathcal{B}_{j-1}) - X_{j-1})) \\ &\geqq E(\xi_j(X_{j-1} - X_{j-1})) = 0 \end{aligned}$$

となるから

$$E\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j (X_j - X_{j-1})\right) \geqq 0$$

を得る．他方，事象 $\{t_{2N+1} = \infty\}$ 上で

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \xi_j (X_j - X_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{N} (X_{t_{2j-1}} - X_{t_{2j-2}}) + X_n - X_{t_{2N}} \end{aligned}$$

また，事象 $\{t_{2N+1}<\infty\}$ 上で

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j(X_j-X_{j-1})=\sum_{j=1}^{N+1}(X_{t_{2j-1}}-X_{t_{2j-2}})$$

が成立する．ここで，$X_0\leqq a$ のとき

$$X_{t_1}-X_{t_0}=X_0-X_0=0$$

また，$X_0>a$ かつ $t_1<\infty$ のとき

$$X_{t_1}-X_{t_0}\leqq a-X_0<0$$

となるから，いずれにせよ，$t_1<\infty$ のとき

$$X_{t_1}-X_{t_0}\leqq 0$$

が成立する．さらに

$$X_n-X_{t_{2N}}\leqq X_n-b\leqq a-b+(X_n-a)_+$$

となり，また，$\{t_{2N+1}<\infty\}$ 上でも，$X_{t_{2N+1}}-X_{t_{2N}}\leqq a-b\leqq a-b+(X_n-a)_+$ が成り立つから，Ω 上で

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\xi_j(X_j-X_{j-1})\\&\leqq\sum_{j=2}^{N}(X_{t_{2j-1}}-X_{t_{2j-2}})+a-b+(X_n-a)_+\\&\leqq N(a-b)+(X_n-a)_+\end{aligned}$$

が成立する．故に，

$$\begin{aligned}&(a-b)E(N)+E((X_n-a)_+)\\&\geqq E\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(X_j-X_{j-1})\right)\geqq 0\end{aligned}$$

となり，

$$E(N)\leqq\frac{1}{b-a}E((X_n-a)_+)$$

を得る．（証明終）

$\tau:\Omega\to\{0,1,\cdots,n\}$ は集合体の増大列 $\mathcal{B}_0\subset\mathcal{B}_1\subset\cdots\subset\mathcal{B}_n$ に適合したマルコフ時刻とする．すなわち，任意の $i=0,1,\cdots,n$ に対して，$\{\tau\leqq i\}\in\mathcal{B}_i$ が成立するものとする．集合 $A\subset\Omega$ で，任意の i に対して

$$A\cap\{\tau\leqq i\}\in\mathcal{B}_i$$

となるものの全体を $\mathcal{B}_\tau$ と書く．明らかに，$\mathcal{B}_\tau$ は集合体で，その原子の全体は，$\{\tau=i\}$ に含まれる $\mathcal{B}_i$ の原子の全体の i に関する和となる．

〔定理 1.34〕　τ と η は $(\mathcal{B}_i;\ i=0,\cdots,n)$ に適合したマルコフ時刻で，$\tau\leqq\eta$ を満すものとする．また，$(\mathcal{B}_i;\ i=0,\cdots,n)$ に適合した確率変数列 (X_i) をとる．このとき，

（1）　$\mathcal{B}_\tau\subset\mathcal{B}_\eta$

（2）　X_τ は $\mathcal{B}_\tau$ 可測となる．

証明：

（1）　$A\in\mathcal{B}_\tau$ とするとき，任意の $i=0,\cdots,n$ に対して

$$A\cap\{\eta\leqq i\}=A\cap\{\tau\leqq i\}\cap\{\eta\leqq i\}$$

となり，定義より

$$A\cap\{\tau\leqq i\}\in\mathcal{B}_i$$

だから

$$A\cap\{\eta\leqq i\}\in\mathcal{B}_i$$

を得る．故に，$A\in\mathcal{B}_\eta$ となる．

（2）　任意の x に対して，

$$\{X_\tau=x\}\in\mathcal{B}_\tau$$

を示せばよい．任意の $i=0,\cdots,n$ に対して

$$\begin{aligned}&\{X_\tau=x\}\cap\{\tau=i\}\\&\quad=\{X_i=x\}\cap\{\tau=i\}\in\mathcal{B}_i\end{aligned}$$

が成立する．故に，

$$\{X_\tau=x\}\in\mathcal{B}_\tau$$

となる．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

〔定理 1.35〕　$X_0, X_1, \cdots, X_n$ はマルチンゲールで，τ と η は $\tau\leqq\eta$ を満すマルコフ時刻とする．このとき，

（1）　$X_\tau=E(X_\eta|\mathcal{B}_\tau)$

（2）　$E(X_\eta)=E(X_0)$ が成立する．

証明：$i=0,\cdots,n$ に対して，マルコフ時刻 ξ_i を $\xi_i=\eta\wedge(\tau+i)$ と定義

するとき，$\xi_0=\tau$，$\xi_n=\eta$ かつ

$$\xi_i \leqq \xi_{i+1} \leqq \xi_i+1 \qquad (i=0, \cdots, n-1)$$

が成立する．また，$i=0, \cdots, n-1$ に対して

$$X_{\xi_i}=E(X_{\xi_{i+1}} | \mathscr{B}_{\xi_i})$$

が証明されれば

$$\begin{aligned} X_\tau &= E(X_{\xi_1} | \mathscr{B}_\tau) \\ &= E(E(X_{\xi_2} | \mathscr{B}_{\xi_1}) | \mathscr{B}_\tau) \\ &= E(X_{\xi_2} | \mathscr{B}_\tau) \\ &= \quad \cdots \\ &= E(X_\eta | \mathscr{B}_\tau) \end{aligned}$$

となり（1）が示される．故に，（1）を証明するのに，$\tau \leqq \eta \leqq \tau+1$ を仮定してよい．このとき，任意の $\omega \in \Omega$ に対して，ω を含む $\mathscr{B}_\tau$ の原子を B とする．$\tau(\omega)=i$ とするとき，B は $\mathscr{B}_i$ の原子でもあるから，B 上で X_i は一定値をとる．また，$\{\eta=i\}$ は $\mathscr{B}_i$ 可測で，また，B は $\mathscr{B}_i$ の原子だから仮定より，B 上で η は一定値 i または $i+1$ をとる．B 上で $\eta=i$ のとき

$$\begin{aligned} E(X_\eta | \mathscr{B}_\tau)(\omega) &= E(X_i | \mathscr{B}_i)(\omega) \\ &= X_i(\omega) = X_\tau(\omega) \end{aligned}$$

となる．また，B 上で $\eta=i+1$ のとき，マルチンゲールであることを用いて

$$\begin{aligned} E(X_\eta | \mathscr{B}_\tau)(\omega) &= E(X_{i+1} | \mathscr{B}_i)(\omega) \\ &= X_i(\omega) = X_\tau(\omega) \end{aligned}$$

となる．以上より（1）が成立する．（2）は，$\tau=0$ と η とに対して（1）を用いて

$$E(X_\eta)=E(E(X_\eta | \mathscr{B}_0))=E(X_0)$$

より得られる．（証明終）

上の結果（2）は，マルチンゲールにおいては，どのようなマルコフ

時刻を用いて停止しても，期待値は変らないことを意味する．マルチンゲールは，公平な賭けに対応する概念であり，そこには，有利な停止戦略は存在しない．

2

測 度 と 積 分

2.1　確率空間の拡張

第1章においては，有限確率空間を考察したが，連続量や無限に続く確率変数列を扱う場合には，もっと大きな確率空間が必要となる．そのために有限確率空間を拡張しなければならない．例えば，有限集合Σに値をとる無限の試行列$X_0, X_1, \cdots$を考察するためには，確率空間として，$\Sigma^{\{0,1,\cdots\}}$が必要となる．これは，確率空間$\Sigma^{\{0,\cdots,n\}}$において，$n=0,1,2,\cdots$としたときの拡張列の極限と考えてよい．$X_0, \cdots, X_n$が$\Sigma^{\{0,\cdots,n\}}$上にもたらす分布をP_nとする．すなわち，$(\omega_0, \cdots, \omega_n)\in\Sigma^{\{0,\cdots,n\}}$に対して

$$P_n(\omega_0, \cdots, \omega_n)=P(X_0=\omega_0, \cdots, X_n=\omega_n)$$

とする．また，$n\leqq m$に対して，$\sum^{\{0,\cdots,m\}}$から$\Sigma^{\{0,\cdots,n\}}$への射影を$\pi_{n,m}$とする．すなわち，

$$\pi_{n,m}(\omega_0, \cdots, \omega_m)=(\omega_0, \cdots, \omega_n)$$

とする．このとき，確率空間（$\Sigma^{\{0,\cdots,m\}}$，P_m）は確率空間（$\Sigma^{\{0,\cdots,n\}}$，P_n）の拡張となっており，拡張写像は$\pi_{n,m}$によって与えられる．すなわち，任意の事象$S\subset\Sigma^{\{0,\cdots,n\}}$に対して，$P_n(S)=P_m(\pi_{n,m}^{-1}S)$が成立している．

一方$\Omega=\Sigma^{\{0,1,\cdots\}}$とし，$\Omega$から$\Sigma^{\{0,\cdots,n\}}$への射影を$\pi_n$とする．すなわち

$$\pi_n(\omega_0, \omega_1, \cdots)=(\omega_0, \cdots, \omega_n)$$

とする．さらに，Ω上に確率測度Pを導入するが，Ωの部分集合Aが有限個の$X_0, \cdots, X_n$のみに関係した事象のとき，すなわち$A=\pi_n^{-1}\tilde{A}$と

なる $\tilde{A}\subset\Sigma^{\{0,\cdots,n\}}$ が存在するときには，A は**筒集合**と呼ばれ，$P(A)=P_n(\tilde{A})$ と定義することとする．この定義が well defined であることは，任意の $n\leqq m$ に対して，P_m が P_n の拡張となっていることより明らか．このようにして，Ω の部分集合で，有限個の座標のみに関係するもの，すなわち，筒集合に対して，確率が定義される．筒集合の全体を $\mathcal{A}$ とする．このとき，$(\Omega,\mathcal{A},P)$ は次節で定義する有限加法的確率空間となる．なぜなら，明らかに $\phi\in\mathcal{A}$ となる．$A\in\mathcal{A}$ とすると，$A=\pi_n^{-1}\tilde{A}$ となる n および $\tilde{A}\subset\Sigma^{\{0,\cdots,n\}}$ がとれる．このとき，$A^c=\pi_n^{-1}\tilde{A}^c$ となるから，$A^c\in\mathcal{A}$ となる．また，$A,B\in\mathcal{A}$ とする．このとき，$A=\pi_n^{-1}\tilde{A}$, $B=\pi_m^{-1}\tilde{B}$ となる n,m および $\tilde{A}\subset\Sigma^{\{0,\cdots,n\}}$, $\tilde{B}\subset\Sigma^{\{0,\cdots,m\}}$ が存在する．一般性を失なわず $n\leqq m$ と仮定してよい．このとき，

$$A\cup B=\pi_m^{-1}(\pi_{n,m}^{-1}\tilde{A}\cup\tilde{B})$$

となり，$A\cup B\in\mathcal{A}$ となる．以上より $\mathcal{A}$ は集合体となる．

次に，$A\cap B=\phi$ となる $A,B\in\mathcal{A}$ をとる．一般性を失なわず，$n\leqq m$, $A=\pi_n^{-1}\tilde{A}$, $B=\pi_m^{-1}\tilde{B}$ と考えてよい．このとき，

$$A\cup B=\pi_m^{-1}(\pi_{n,m}^{-1}\tilde{A}\cup\tilde{B})$$

$$\pi_{n,m}^{-1}\tilde{A}\cup\tilde{B}=\phi$$

となるから，P の定義より

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P_m(\pi_{n,m}^{-1}\tilde{A}\cup\tilde{B})\\&=P_m(\pi_{n,m}^{-1}\tilde{A})+P_m(\tilde{B})\\&=P_n(\tilde{A})+P_m(\tilde{B})\\&=P(A)+P(B)\end{aligned}$$

を得る．また，$P(\phi)=0$, $P(\Omega)=1$ だから，P は $(\Omega,\mathcal{A})$ 上の有限加法的確率測度となる．

このような有限加法的確率空間 $(\Omega,\mathcal{A},P)$ では．無限個の座標に関係した事象を扱うことはできない．例えば，確率変数列の極限 $\lim_{n\to\infty}X_n$ を論じることはできない．このため，$\mathcal{A}$ を拡張し，**σ 集合体**とし，P をこの σ 集合体上の**完全加法的**な確率測度に拡張する．

2.2 ルベーク測度論

組 $(X, \mathcal{A}, P)$ が**有限加法的確率空間**であるとは，

（1） X は集合.

（2） $\mathcal{A}$ は X 上の**集合体**.

（3） P は $(X, \mathcal{A})$ 上の**有限加法的確率測度**，すなわち，P は $\mathcal{A}$ から $[0,1]$ への写像で

（i） $P(\phi)=0$

（ii） $P(\Omega)=1$

（iii） $A \cap B=\phi$ となる任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

を満す.

有限加法的確率空間 $(X, \mathcal{A}, P)$ において，互いに共通部分をもたない可算無限個の $A_n \in \mathcal{A}$ $(n=1,2\cdots)$ が $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ を満すとき，常に

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

が成立するなら，P は $\mathcal{A}$ 上**完全加法的**であると呼ばれる．また，集合体 $\mathcal{A}$ は，任意の可算無限個の $A_n \in \mathcal{A}$ $(n=1,2,\cdots)$ に対して，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ となるとき，**σ 集合体**と呼ばれる．このとき，$A_n \in \mathcal{A}$ $(n=1,2,\cdots)$ に対して，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ も成立する．一般に，$\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ に対して，$\mathcal{C}$ が生成する σ 集合体を $\sigma\mathcal{C}$ と書く．すなわち，$\sigma\mathcal{C}$ は，$\mathcal{C}$ を含む最小の σ 集合体である.

有限加法的確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ が**確率空間**であるとは，$\mathcal{A}$ が σ 集合体で，P が $\mathcal{A}$ 上完全加法的であることをいう．このとき，P を**確率測度**と呼ぶ．有限確率空間は確率空間である.

〔定理 2.1〕 P が σ 集合体 $\mathcal{A}$ 上の確率測度のとき，$\mathcal{A}$ の元の列 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ および $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ に対して

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(B_n)$$

が成立する．

証明：

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)&=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\backslash A_{n-1})\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n\backslash A_{n-1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}P(A_i\backslash A_{i-1})\\&=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\backslash A_{i-1})\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)\qquad(A_0:=\phi)\end{aligned}$$

となる．後者は

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n{}^c\right)^c$$

だから，前者より導かれる．（証明終）

〔**定理 2.2**〕（ホップの拡張定理）　有限加法的確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ が与えられている．P が $\sigma\mathcal{A}$ 上の確率測度に拡張できるための必要十分条件は，P が $\mathcal{A}$ 上完全加法的なことである．また，このような拡張は一意的である．

証明：P が $\sigma\mathcal{A}$ 上の測度に拡張されるなら，明らかに，P は $\mathcal{A}$ 上完全加法的である．逆に，P が $\mathcal{A}$ 上完全加法的だとする．

$B\subset\Omega$ に対して

$$\bar{P}(B)=\inf\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

と定義する．ただし，ここで“inf”は，$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\supset B$ を満す $\mathcal{A}$ の元の列 A_n $(n=1,2,\cdots)$ に関する下限を意味する．この $\bar{P}$ を P に対応する**外測度**と呼ぶ．明らかに，$A\subset B$ のとき $\bar{P}(A)\leqq\bar{P}(B)$ が成立する．また，勝手な $B_n\subset\Omega$ $(n=1,2,\cdots)$ に対して

（1）　$\bar{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\bar{P}(B_n)$

が成立する．なぜなら，任意の $\varepsilon>0$ と $n=1,2,\cdots$ に対して

$$\bar{P}(B_n)>\sum_{m=1}^{\infty}P(A_{n,m})-2^{-n}\varepsilon$$

$$B_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$$

を満す $A_{n,m} \in \mathcal{A}$ がとれる．ここで，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$$

だから

$$\begin{aligned}\bar{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P(A_{n,m}) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{P}(B_n) + 2^{-n}\varepsilon) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}(B_n) + \varepsilon\end{aligned}$$

が成立する．$\varepsilon > 0$ は任意だから，（1）を得る．

また，$A \in \mathcal{A}$ のとき，$\bar{P}(A) = P(A)$ を証明する．$\bar{P}(A) \leqq P(A)$ は明らかだから，$\bar{P}(A) \geqq P(A)$ を示す．任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\bar{P}(A) > \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) - \varepsilon$$

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

を満す $A_n \in \mathcal{A}$ $(n=1, 2, \cdots)$ がとれる．ここで

$$A_1' = A_1 \cap A$$

$$A_n' = (A_n \cap A) \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \qquad (n=2, 3, \cdots)$$

とおくとき，$A_n' \in \mathcal{A}$ $(n=1, 2, \cdots)$ かつ

$$A_n' \subset A_n \qquad (\forall n)$$

$$A_n' \cap A_m' = \phi \qquad (\forall n \neq m)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n' = A$$

が成立する．故に，P が $\mathcal{A}$ 上完全加法的であることを用いて

$$\begin{aligned}\bar{P}(A) &> \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) - \varepsilon \\ &\geqq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n') - \varepsilon\end{aligned}$$

$$=P(A)-\varepsilon$$

を得る．$\varepsilon>0$ は任意だから $\bar{P}(A)\geqq P(A)$ が成立し，$\bar{P}(A)=P(A)$ を得る．

$A\subset\Omega$ で，すべての $B\subset\Omega$ に対して

（2） $\bar{P}(B)=\bar{P}(B\cap A)+\bar{P}(B\backslash A)$

を満すものの全体を $\mathcal{B}$ と書く．このとき，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ を含む σ 集合体であることを証明する．

$A\in\mathcal{A}$ とする．勝手な $B\subset\Omega$ に対して（2）を示す．（1）を考慮すると

$$\bar{P}(B)\geqq\bar{P}(B\cap A)+\bar{P}(B\backslash A)$$

を示せば十分である．任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\bar{P}(B)>\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)-\varepsilon$$

$$B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$$

を満す $B_n\in\mathcal{A}$ $(n=1,2,\cdots)$ がとれる．このとき

$$B\cap A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A)$$

$$B\backslash A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n\backslash A)$$

だから

$$\bar{P}(B\cap A)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n\cap A)$$

$$\bar{P}(B\backslash A)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n\backslash A)$$

が成立する．故に，

$$\begin{aligned}\bar{P}(B)&>\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)-\varepsilon\\&=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n\cap A)+\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n\backslash A)-\varepsilon\\&\geqq\bar{P}(B\cap A)+\bar{P}(B\backslash A)-\varepsilon\end{aligned}$$

となり，$\varepsilon>0$ は任意だから

$$\bar{P}(B) \geqq \bar{P}(B \cap A) + \bar{P}(B \backslash A)$$

を得る．これより，$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ が成立する．

次に，$\mathcal{B}$ が σ 集合体となることを示す．$A \in \mathcal{B}$ とする．このとき，勝手な $B \subset \Omega$ に対して，（2）が成立するから

$$\bar{P}(B) = \bar{P}(B \cap A^c) + \bar{P}(B \backslash A^c)$$

を得る．よって，$A^c \in \mathcal{B}$ となる．また，$A_n \in \mathcal{B}$ $(n=1, 2, \cdots)$ とする．このとき，勝手な $B \subset \Omega$ に対して，（1）および（2）を用いて

$$\begin{aligned}
\bar{P}(B) &= \bar{P}(B \cap A_1) + \bar{P}(B \backslash A_1) \\
&= \bar{P}(B \cap A_1) + \bar{P}((B \backslash A_1) \cap A_2) + \bar{P}((B \backslash A_1) \backslash A_2) \\
&\geqq \bar{P}((B \cap A_1) \cup ((B \backslash A_1) \cap A_2)) + \bar{P}(B \backslash (A_1 \cup A_2)) \\
&= \bar{P}(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \bar{P}(B \backslash (A_1 \cup A_2)) \\
&\geqq \ \cdots \\
&\geqq \bar{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \bar{P}\left(B \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \qquad (n=1, 2, \cdots)
\end{aligned}$$

が成立する．ここで

（3） $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \bar{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bar{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$

が示されれば，上式より

$$\bar{P}(B) \geqq \bar{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \bar{P}\left(B \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

となり，（1）より逆の不等式も成立するから，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ に対して（2）が成立することとなり，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ を得る．これより，$\mathcal{B}$ は σ 集合体となる．また，上式より，すでに，$\mathcal{B}$ が集合体となることは示されている．

（3）を示すために，$\mathcal{B}$ に属す集合の勝手な増大列 $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ に対して

（4） $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \bar{P}(B_n) = \bar{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$

を示す．ここで

$$B_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$C_1 = B_1$$

$$C_n = B_n \backslash B_{n-1} \qquad (n=2, 3, \cdots)$$

とおくとき，$C_n \in \mathcal{B}$ だから，（2）より

$$\begin{aligned}\bar{P}(B_n) &= \bar{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) \\ &= \bar{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap C_1\right) + \bar{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \backslash C_1\right) \\ &= \bar{P}(C_1) + \bar{P}\left(\bigcup_{i=2}^{n} C_i\right) \\ &= \quad \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{n} \bar{P}(C_i)\end{aligned}$$

を得る．故に，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \bar{P}(C_i) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \bar{P}(C_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \bar{P}(B_n) \leqq 1\end{aligned}$$

が成立する．これより，$B_n \in \mathcal{B}$ および（1）と（2）を用いて

$$\begin{aligned}\bar{P}(B_n) &= \bar{P}(B_\infty) - \bar{P}(B_\infty \backslash B_n) \\ &= \bar{P}(B_\infty) - \bar{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} C_i\right) \\ &\geqq \bar{P}(B_\infty) - \sum_{i=n+1}^{\infty} \bar{P}(C_i)\end{aligned}$$

を得る．ここで，$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{P}(C_i) \leqq 1$ だから

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \bar{P}(C_i) = 0$$

となる．よって

$$\lim_{n\to\infty} \bar{P}(B_n) \geqq \bar{P}(B_\infty)$$

を得る．$B_n \subset B_\infty (\forall n)$ だから，逆の不等式は自明で，（4）が成立する．

ここで，（3）の右辺は，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}$ だから

$$\bar{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \bar{P}\left(\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\
&\leqq \bar{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \bar{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\
&= \bar{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \bar{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \bar{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)
\end{aligned}
$$

となり，$n\to\infty$ とすると，（4）を用いて

$$
\lim_{n\to\infty} \bar{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqq \bar{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)
$$

を得る．これは，（3）を意味する．以上より，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ を含む σ 集合体となり，$\sigma\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ が成立する．

$\bar{P}$ の $\mathcal{B}$ への制限が確率測度となることを示す．$\bar{P}(\phi)=0$, $\bar{P}(\Omega)=1$ は自明だから，互いに共通部分をもたない $A_n \in \mathcal{B}$ $(n=1,2,\cdots)$ に対して

$$
\bar{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}(A_n)
$$

を示せばよい．（4）を用いて，上と同様に

$$
\begin{aligned}
\bar{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \lim_{n\to\infty} \bar{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \bar{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{P}(A_i)
\end{aligned}
$$

が得られる．さらに，$\bar{P}$ は $\mathcal{A}$ 上では P と一致するから，P の $\mathcal{B}$ への拡張となっている．また，$\sigma\mathcal{A}$ への拡張と考えてよい．

最後に拡張の一意性を示す．P の拡張となる $\sigma\mathcal{A}$ 上の確率測度 P_1 と P_2 を考える．

$$
\mathcal{C} = \{B \in \sigma\mathcal{A};\ P_1(B) = P_2(B)\}
$$

とおくとき，$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ となる．さらに，$\mathcal{C}$ が**単調族**であること，すなわち，$\mathcal{C}$ の元の勝手な単調列 $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ および $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ に対して

$$
\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{C}
$$

となることが定理 2.1 より導かれる．

よって，$\mathcal{C}$ は $\mathcal{A}$ を含み $\sigma\mathcal{A}$ に含まれる単調族となり，以下の定理 2.3 より，$\mathcal{C} = \sigma\mathcal{A}$ を得る．すなわち，P_1 と P_2 は $\sigma\mathcal{A}$ 上一致する．これで，拡張の一意性が証明された．（証明終）

〔**定理 2.3**〕 $\mathcal{A}$を集合Ω上の集合体とする．このとき，$\sigma\mathcal{A}$は$\mathcal{A}$を含む最小の単調族である．

証明：$\sigma\mathcal{A}$は単調族だから，$\mathcal{A}$を含む最小の単調族$\mathcal{C}$がσ集合体であることをいえばよい．明らかに，単調族は集合体であればσ集合体だから，$\mathcal{C}$が集合体であればよい．

$$\mathcal{D}=\{B\in\mathcal{C};\ B^c\in\mathcal{C},\ B\cup A\in\mathcal{C}\quad(\forall A\in\mathcal{A})\}$$

とおくとき，$\mathcal{D}$は$\mathcal{A}$を含む単調族だから，$\mathcal{D}=\mathcal{C}$となる．故に，

$$\mathcal{E}=\{C\in\mathcal{C};\ C^c\in\mathcal{C},\ B\cup C\in\mathcal{C}\quad(\forall B\in\mathcal{C})\}$$

は$\mathcal{A}$を含む単調族となり，$\mathcal{E}=\mathcal{C}$を得る．これは$\mathcal{C}$が集合体であることを意味する． (証明終)

〔**定理 2.4**〕 Σを空でない有限集合とし，$\Omega=\Sigma^{\{0,1,\cdots\}}$とする．$\Omega$に含まれる筒集合の全体を$\mathcal{A}$とし，$P$を$\mathcal{A}$上の有限加法的確率測度とする．このとき，$P$は$\mathcal{A}$上完全加法的で，$P$は$\sigma\mathcal{A}$上の確率測度に一意的に拡張される．

証明：定理 2.2 より，Pが$\mathcal{A}$上完全加法的となることを示せばよい．$A_n\in\mathcal{A}$ $(n=1,2,\cdots)$ は互いに共通部分をもたない集合列で，$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$を満すものとする．$\Omega$に直積位相を考えると，$\Omega$はコンパクトとなり，また，筒集合は閉集合かつ開集合となる．故に，集合$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$はコンパクトとなり，これの開被覆 $(A_n;\ n=1,2,\cdots)$ から有限個の$A_{n_1},\cdots,A_{n_k}$がとれて

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{i=1}^{k}A_{n_i}$$

となる．$A_n(n=1,2,\cdots)$ は互いに共通部分をもたないから，$n\notin\{n_1,\cdots,n_k\}$ のとき，$A_n=\phi$となる．故に，Pが有限加法的であることより

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_{n_i}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}P(A_{n_i})=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

となり，Pは完全加法的となる． (証明終)

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とする．$A \subset X$ は，$\mu(B)=0$，$A \subset B$ となる $B \in \mathcal{B}$ が存在するとき，**P 零集合**と呼ぶ．$\mathcal{B}$ が P 零集合の全体を含むとき，この確率空間は**完備**であるといわれる．$\mathcal{B}$ と P 零集合全体から生成される σ 集合体を $\overline{\mathcal{B}}$ とするとき，任意の $B \in \overline{\mathcal{B}}$ に対して，$A, C \ni \mathcal{B}$ が存在して，$A \subset B \subset C$ かつ $P(A)=P(C)$ となる．故に，このような B に対して，$P(B)=P(A)$ と定義すれば，P は $\overline{\mathcal{B}}$ 上の確率測度とも考えられる．このような確率空間 $(\Omega, \overline{\mathcal{B}}, P)$ は完備であり，$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の**完備化**と呼ばれる．また，$\overline{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{B}$ の **P 完備化**，$\overline{\mathcal{B}}$ の元は **P 可測集合**と呼ばれる．

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とする．$f : \Omega \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ が **$\mathcal{B}$ 可測関数**であるとは，任意の $a \in \boldsymbol{R}$ に対して，$\{\omega \in \Omega ;\ f(\omega) \leqq a\} \in \mathcal{B}$ となることをいう．また，これが P 可測集合のとき，**P 可測関数**と呼ぶ．$\boldsymbol{R}$ の開集合全体から生成される σ 集合体を**ボレル集合体**と呼び，その元を**ボレル集合**と呼ぶ．また，$[-\infty, \infty]$ 上のボレル集合とは，$\boldsymbol{R}$ 上のボレル集合と $\{-\infty, \infty\}$ の部分集合の和集合をいう．

〔定理 2.5〕 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とする．関数 $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ に関して，以下の命題は互いに同値である．

（1） f は P 可測関数．

（2） 任意の $a \in \boldsymbol{R}$ に対して $\{\omega \in \Omega ;\ f(\omega) < a\}$ は P 可測集合となる．

（3） 任意の $a \in \boldsymbol{R}$ に対して $\{\omega \in \Omega ;\ f(\omega) \geqq a\}$ は P 可測集合となる．

（4） 任意の $a \in \boldsymbol{R}$ に対して $\{\omega \in \Omega ;\ f(\omega) > a\}$ は P 可測集合となる．

（5） $\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ の任意のボレル集合 B に対して，$\{\omega \in \Omega ;\ f(\omega) \in B\}$ は P 可測集合となる．

証明：

（1）→（2）

$$\{\omega \in \Omega ;\ f(\omega) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega ;\ f(\omega) \leqq a - \frac{1}{n}\right\} \in \overline{\mathcal{B}} \qquad (\forall a \in \boldsymbol{R})$$

(2)→(3)

$$\{\omega\in\Omega;\ f(\omega)\geqq a\}$$
$$=\{\omega\in\Omega;\ f(\omega)<a\}^c\in\overline{\mathscr{B}}\qquad(\forall a\in\boldsymbol{R})$$

(3)→(4)

$$\{\omega\in\Omega;\ f(\omega)>a\}$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\omega\in\Omega;\ f(\omega)\geqq a+\frac{1}{n}\right\}\in\overline{\mathscr{B}}\qquad(\forall a\in\boldsymbol{R})$$

(4)→(1)

$$\{\omega\in\Omega;\ f(\omega)\leqq a\}$$
$$=\{\omega\in\Omega;\ f(\omega)>a\}^c\in\overline{\mathscr{B}}\qquad(\forall a\in\boldsymbol{R})$$

以上より，条件（1）～（4）は互いに同値となる．また，（5）からこれらが導かれることは明らかだから，これらから（5）を導けば証明が完了する．条件（1）～（4）を仮定する．任意の $a<b$ に対して

$$\{\omega\in\Omega;\ f(\omega)\in(a,b)\}$$
$$=\{\omega\in\Omega;\ f(\omega)>b\}\setminus\{\omega\in\Omega;\ f(\omega)\leqq a\}\in\overline{\mathscr{B}}$$

を得る．$\boldsymbol{R}$ の任意の開集合 U は，開区間の可算和として表せるから，これより

$$\{\omega\in\Omega;\ f(\omega)\in U\}\in\overline{\mathscr{B}}$$

が導かれる．故に，

$$\{B\subset[-\infty,\infty];\ \{\omega\in\Omega;\ f(\omega)\in B\}\in\overline{\mathscr{B}}\}$$

は $\boldsymbol{R}$ の任意の開集合と $[-\infty,0]$ を含み，明らかに σ 集合体でもあるから，$[-\infty,\infty]$ の任意のボレル集合を含み，（5）が成立する．

（証明終）

複素数の全体を $\boldsymbol{C}$ と書くとき，関数 $f:\Omega\to\boldsymbol{C}$ が P **可測**であるとは，f の**実部**を ξ，**虚部**を η とするとき，すなわち，

$$\begin{array}{l}f(\omega)=\xi(\omega)+i\eta(\omega)\\ \xi(\omega),\eta(\omega)\in\boldsymbol{R}\end{array}\qquad(\forall\omega\in\Omega)$$

とおくとき，ξ および η が P 可測となることをいう．

〔**定理 2.6**〕　確率空間 $(\Omega,\ \mathcal{B},\ P)$ 上の P 可測な $\boldsymbol{C}$ 値関数の列 f_n $(n=1, \cdots, k)$ と連続関数 $g : \boldsymbol{C}^k \to \boldsymbol{C}$ が与えられている．このとき，関数 $g(f_1(\omega), \cdots, f_k(\omega))$ は P 可測関数となる．とくに，$f_1(\omega) \pm f_2(\omega)$, $f_1(\omega) f_2(\omega)$，$|f_1(\omega)|$，$e^{i\lambda f_1(\omega)}$ $(\lambda \in \boldsymbol{C})$ などは P 可測となる．

証明：$\boldsymbol{C} \cong \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ だから，g の実部および虚部は $\boldsymbol{R}^{2k}$ から $\boldsymbol{R}$ への関数と考えてよい．$2k$ を k と考えれば，結局，上の結果を各 f_n が $\boldsymbol{R}$ 値で，g が連続関数 $\boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}$ のときに証明すれば十分である．任意の $a \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$U := \{(x_1, \cdots, x_k) \in \boldsymbol{R}^k;\ g(x_1, \cdots, x_k) < a\}$$

は $\boldsymbol{R}^k$ の開集合となる．故に，$\boldsymbol{R}$ の開集合の列 $V_{i,j}(i=1, \cdots, k;\ j=1, 2, \cdots)$ が存在して

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_{1,j} \times \cdots \times V_{k,j}$$

となる．故に，

$$\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega;\ g(f_1(\omega), \cdots, f_k(\omega)) < a\} \\
&= \{\omega \in \Omega;\ (f_1(\omega), \cdots, f_k(\omega)) \in U\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{k} \{\omega \in \Omega;\ f_i(\omega) \in V_{i,j}\} \in \overline{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

となり，$g(f_1(\omega), \cdots, f_k(\omega))$ は P 可測となる．　(証明終)

〔**定理 2.7**〕　確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の P 可測な $[-\infty, \infty]$ 値関数列 $f_n(n=1, 2, \cdots)$ が与えられたとき，$\inf_n f_n(\omega), \sup_n f_n(\omega), \varliminf_{n\to\infty} f_n(\omega)$, $\varlimsup_{n\to\infty} f_n(\omega)$ も P 可測となる．

証明：任意の $a \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\{\omega \in \Omega;\ \inf_n f_n(\omega) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega;\ f_n(\omega) < a\} \in \overline{\mathcal{B}}$$

となり，$\inf_n f_n(\omega)$ は P 可測となる．他についても同様．　(証明終)

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とする．P 可測関数 $f : \Omega \to \boldsymbol{R}$ が**単関数**であるとは，f の値域 I_f が有限集合となることをいう．f を $[0, \infty]$ 値 P 可測関数とする．このとき，f の P による**積分**を（∞ も許して）

$$\int f dP = \sup_{\substack{0 \leqq g \leqq f \\ g \text{は単関数}}} \sum_{a \in I_g} aP(\{\omega \in \Omega;\ f(\omega) = a\})$$

と定義する．また，$[-\infty, \infty]$ 値 P 可測関数 f に対して，$f_+(\omega) = f(\omega) \vee 0$，$f_-(\omega) = (-f(\omega)) \vee 0$ とおくとき，f の P による**積分**を

$$\int f dP = \int f_+ dP - \int f_- dP$$

と定義する．ただし，

$$\int f_+ dP = \int f_- dP = \infty$$

のとき，$\int f dP$ は定義されないものとする．とくに，

$$\int f_+ dP < \infty \quad \text{かつ} \quad \int f_- dP < \infty$$

のとき，すなわち

$$\int |f| dP < \infty$$

のとき，f は **P 可積分**であるという．また，P 可測関数 $f: \Omega \to \boldsymbol{C}$ は，実部を ξ，虚部を η とおくとき，ξ および η が P 可積分のとき，**P 可積分**であるという．このための必要十分条件は $\int |f| dP < \infty$ となることである．このとき，**積分**を

$$\int f dP = \int \xi dP + i \int \eta dP$$

と定義する．

積分 $\int f dP$ は，変数を表示して $\int f(\omega) dP(\omega)$ とも記される．また，P 可測集合 A と P 可測関数 f に対して

$$\int_A f dP = \int 1_A(\omega) f(\omega) dP(\omega)$$

と定義する．

f が単関数のとき

$$\int f dP = \sum_{a \in I_f} aP(\{\omega \in \Omega;\ f(\omega) = a\})$$

が成立する．

Ω 上の命題 $R(\omega)$ が，ある P 零集合に属す ω を除いて成立するとき，$R(\omega)$ は（P に関して）**ほとんどすべて**の ω に対して成立するといい，P-$a.a.\omega$ に対して $R(\omega)$，または

$$R(\omega) \qquad P\text{-}a.a.\,\omega$$

と書く．

〔**定理 2.8**〕（単調収束定理）　確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の $[0, \infty]$ 値 P 可測関数列 $f_1 \leqq f_2 \leqq \cdots$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n dP = \int \lim_{n\to\infty} f_n dP$$

が成立する．

証明：$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ とおくとき，$0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq \cdots \leqq f$ だから

$$\int f_1 dP \leqq \int f_2 dP \leqq \cdots \leqq \int f dP$$

となる．故に，

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n dP \leqq \int f dP$$

が成立する．逆に，$0 \leqq g < f$ を満す勝手な単関数 g をとる．このとき

$$g = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i}$$

$$0 \leqq a_i < \infty$$

$$A_i \in \overline{\mathcal{B}} \qquad (\forall i)$$

$$A_i \cap A_j = \phi \qquad (\forall i \neq j)$$

と書ける．$\lim_{n\to\infty} f_n > g$ だから，

$$A_i^n = \{\omega \in A_i;\ f_n(\omega) > a_i\} \in \overline{\mathcal{B}} \qquad (i = 1, \cdots, k;\ \ n = 1, 2, \cdots)$$

とおくとき，$A_i^1 \subset A_i^2 \subset \cdots$ かつ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i^n = A_i \qquad (i = 1, \cdots, k)$$

が成立する．故に，定理 2.1 を用いて

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n dP \geqq \lim_{n\to\infty}\int \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i^n} dP = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i P(A_i^n)$$

$$=\sum_{i=1}^{k} a_i P(A_i)=\int g dP$$

を得る．故に，

$$\int f dP=\sup_{\substack{0\leqq g\leqq f\\ g\,:\,\text{単関数}}}\int g dP$$

$$=\sup_{\substack{0\leqq g<f\\ g\,:\,\text{単関数}}}\int g dP\leqq\lim_{n\to\infty}\int f_n dP$$

となる．以上より定理 2.8 は証明された．（証明終）

〔**定理 2.9**〕（ファトゥーの補題）　確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の $[0,\infty]$ 値 P 可測関数列 f_n $(n=1,2,\cdots)$ に対して

$$\varliminf_{n\to\infty}\int f_n dP\geqq\int\varliminf_{n\to\infty} f_n dP$$

が成立する．

証明：

$$F_n=\inf_{m\geqq n} f_m \qquad (n=1,2,\cdots)$$

とおくとき，$f_n\geqq F_n$ $(n=1,2,\cdots)$ だから，定理 2.8 を用いて

$$\varliminf_{n\to\infty}\int f_n dP\geqq\lim_{n\to\infty}\int F_n dP$$

$$=\int\lim_{n\to\infty} F_n dP=\int\varliminf_{n\to\infty} f_n dP$$

を得る．（証明終）

〔**定理 2.10**〕（ルベーグの有界収束定理）　確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の一様有界な複素数値 P 可測関数列 f_n $(n=1,2,\cdots)$ と f に対して

$$f(\omega)=\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \qquad P\text{-}a.a.\,\omega$$

が成立するとき，

$$\int f dP=\lim_{n\to\infty}\int f_n dP$$

となる．

証明：実数値関数の場合について証明すれば十分である．f_n $(n=1,2,\cdots)$ が一様有界だから，$a\leqq f_n\leqq b$ $(n=1,2\cdots)$ が成立するような $a, b\in$

$\boldsymbol{R}$が存在する．このとき，定理2.9より

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}\int f_n dP &= \varliminf_{n\to\infty}\int (f_n - a)\,dP + a \\ &\geqq \int \varliminf_{n\to\infty}(f_n - a)\,dP + a \\ &= \int (f-a)\,dP + a \\ &= \int f dP \\ &= b - \int (b-f)\,dP \\ &= b - \int \varliminf_{n\to\infty}(b-f_n)\,dP \\ &\geqq b - \varliminf_{n\to\infty}\int (b-f_n)\,dP \\ &= \varlimsup_{n\to\infty}\int f_n dP\end{aligned}$$

となるが，他方

$$\varliminf_{n\to\infty}\int f_n dP \leqq \varlimsup_{n\to\infty}\int f_n dP$$

だから

$$\lim\int f_n dP = \int f dP$$

を得る． （証明終）

2.3 σ 有限な測度空間と直積測度

確率空間においては，全空間の測度が1となる．ここでは，これを一般化して，全空間の測度が有限または無限となる測度空間を論じる．後者の例は，$\boldsymbol{R}$ 上のルベーク測度空間である．

集合 X とその上の σ 集合体 $\mathscr{B}$ の組 $(X, \mathscr{B})$ を考える．関数 $\mu: \mathscr{B} \to [0, \infty]$ が **σ 有限**な測度であるとは，

（1） $\mu(\phi)=0$

（2） $A_n \in \mathcal{B}$ $(n=1,2,\cdots)$ が $A_n \cap A_m = \phi$ $(\forall n \neq m)$ を満すとき

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (\infty = \infty \text{も許す})$$

が成立する

（3） $\mu(X_n) < \infty$ かつ $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ を満す $X_n \in \mathcal{B}$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在する

ことをいう．

区間 $[0,1)$ 上の**ルベーク測度** λ_0 を定義しよう．まず，$[0,1)$ に含まれる有限個の区間（開区間，閉区間，半開区間を含む）の和集合と書ける集合の全体を $\mathcal{A}$ とするとき，$A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\lambda_0(A) = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

と定義する．ただし，A_i $(i=1,\cdots,n)$ は

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$
$$A_i \cap A_j = \phi \qquad (\forall i \neq j)$$

を満す区間で，$|A_i|$ は区間の長さを表す．このような λ_0 は well defined であり，また，λ_0 は集合体 $\mathcal{A}$ 上完全加法的な確率測度となる．故に，定理 2.2 より，λ_0 は $\sigma\mathcal{A}$ 上の確率測度に拡張できる．$\mathcal{B}_0$ を $\sigma\mathcal{A}$ の λ_0 完備化とする．このようにして，確率空間 $([0,1), \mathcal{B}_0, \lambda_0)$ が定義される．同様にして，任意の $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して，確率空間 $([n, n+1), \mathcal{B}_n, \lambda_n)$ が定義される．

$\boldsymbol{R}$ 上のルベーク測度 λ を定義する．$\boldsymbol{R}$ の部分集合 B で，$B \cap [n, n+1) \in \mathcal{B}_n$ が任意の $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して成立するようなものの全体を $\mathcal{B}$ とするとき，$\mathcal{B}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の σ 集合体となる．$B \in \mathcal{B}$ に対して

$$\lambda(B) = \sum_{n \in \boldsymbol{Z}} \lambda(B \cap [n, n+1))$$

と定義するとき，λ は $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B})$ 上の σ 有限な測度となる．これを $\boldsymbol{R}$ 上の**ルベーク測度**と呼び，$(\boldsymbol{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ を**ルベーク測度空間**と呼ぶ．

一般に，σ 有限な測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ と可測関数 $f: X \to [0, \infty)$ が与

えられたとき，前節と同様に，**積分** $\int f d\mu$ を定義する．とくに，$\boldsymbol{R}$ 上のルベーグ測度に関する積分は，$\int f dx$ と表す．$\boldsymbol{R}$ 上のルベーグ可測関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ は，$|f|$ がリーマン可積分のとき，ルベーグ測度に関して可積分で，f に対するそれらの積分値は一致する．

〔定理 2.11〕 σ 有限な測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ と μ 可測関数列 $f_n : X \to \boldsymbol{C}\,(n=1,2,\cdots)$ が与えられている．μ-$a.\,a.\,x \in X$ に対して

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

が存在し，かつ，任意の $n=1,2,\cdots$ に対して

$$|f_n(x)| \leqq F(x)$$

が成立するような μ 可積分関数 F が存在するものとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu$$

が成立する．

証明：$\int F d\mu = C$ とおく．$C=0$ のとき，定理 2.11 は自明に成立する．$C>0$ とする．このとき，任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して

$$\lambda(B) = \frac{1}{C}\int_B F d\mu$$

と定義するとき，λ は $(X, \mathcal{B})$ 上の確率測度となる．さらに，

$$\int f_n d\mu = \int \frac{Cf_n}{F} d\lambda$$

が成立するから，定理 2.10 より

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int \frac{Cf_n}{F} d\lambda$$
$$= \int \frac{Cf}{F} d\lambda = \int f d\mu$$

を得る．（証明終）

σ 有限な二つの測度空間 $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ $(i=1,2)$ が与えられたとき，それらの**直積測度空間** $(X_1 \times X_2,\ \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2,\ \mu_1 \times \mu_2)$ を定義する．$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ は集合族 $\{B_1 \times B_2;\ B_1 \in \mathcal{B}_1,\ B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ から生成される $X_1 \times X_2$ 上の σ

集合体で，$\mathscr{B}_1$ と $\mathscr{B}_2$ の**直積**と呼ばれる．$X_1 \times X_2$ の部分集合 A で

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \times C_i$$
$$\left.\begin{array}{l} B_i \in \mathscr{B}_1 \\ C_i \in \mathscr{B}_2 \end{array}\right. \qquad (i=1, \cdots, n)$$

と書けるものの全体を $\mathscr{A}$ と書く．明らかに，$\mathscr{A}$ は $X_1 \times X_2$ 上の集合体で，$\sigma\mathscr{A} = \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$ が成立する．$A \in \mathscr{A}$ のとき

$$A \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i \times C_i$$
$$\left.\begin{array}{l} B_i \in \mathscr{B}_1 \\ C_i \in \mathscr{B}_2 \end{array}\right. \qquad (i=1, \cdots, n)$$
$$B_i \times C_i \cap B_j \times C_j = \phi \qquad (\forall i \neq j)$$

と表せる．このとき

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_1(B_i)\mu_2(C_i)$$

と定義する．これが well defined で，かつ，μ は $\mathscr{A}$ 上完全加法的である．これの $\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$ への拡張を $\mu_1 \times \mu_2$ と書く．このようにして直積測度空間（$X_1 \times X_2$, $\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$, $\mu_1 \times \mu_2$）が定義される．これは σ 有限となる．

〔**定理 2.12**〕　二つの σ 有限な測度空間（$X_i, \mathscr{B}_i, \mu_i$）（$i=1, 2$）と直積測度 $\mu_1 \times \mu_2$ に関して可測な $[0, \infty]$ 値関数 $f(x_1, x_2)$ に対して，各辺が ∞ になる場合も含めて以下の等式が成立する．

$$\int\left(\int f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)\right) d\mu_2(x_2)$$
$$= \int\left(\int f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1)$$
$$= \int f d(\mu_1 \times \mu_2)$$

証明：$\mathscr{A}$ を先に定義した $X_1 \times X_2$ 上の集合体とする．また，$\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$ の $\mu_1 \times \mu_2$ 完備化を $\mathscr{B}$ とする．

$$\mathcal{C}=\left\{B\in\mathcal{B};\ \int 1_B d(\mu_1\times\mu_2)=\int\left(\int 1_B(x_1,x_2)\,d\mu_1(x_1)\right)d\mu_2(x_2)\right.$$
$$\left.=\int\left(\int 1_B(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)\right)d\mu_1(x_1)\right\}$$

と定義するとき，明らかに，$\mathcal{A}\subset\mathcal{C}$ が成立する．また，定理 2.8 より，$\mathcal{C}$ は単調族となる．故に，$\sigma\mathcal{A}=\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2$ だから，定理 2.3 より $\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2\subset\mathcal{C}$ を得る．また，$B\in\mathcal{B}$ のとき，$A\subset B\subset C$ かつ $\mu_1\times\mu_2(C\backslash A)=0$ となる $\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2$ の元 A, C が存在する．これより，$B\in\mathcal{C}$ が導かれ，$\mathcal{C}=\mathcal{B}$ を得る．すなわち，任意の $B\in\mathcal{B}$ に対して，$f=1_B$ のとき，定理 2.12 が成立する．故に，f が単関数のとき，定理 2.12 が成立する．任意の $\mu_1\times\mu_2$ 可測な $[0,\infty]$ 値関数 $f(x_1,x_2)$ は可算個の単関数の単調増加極限として表せるから，定理 2.8 より，f に対しても定理 2.12 が成立する．　（証明終）

〔定理 2.13〕（フビニの定理）　二つの σ 有限な測度空間 $(X_i,\mathcal{B}_i,\mu_i)$ $(i=1,2)$ と直積測度 $\mu_1\times\mu_2$ に関して可積分な複素数値関数 $f(x_1,x_2)$ に対して，以下が成立する．ただし，$j=3-i$，$i=1,2$ とする．

（1）μ_i-$a.a.\,x_i$ に対して，x_j の関数 $f(x_1,x_2)$ は μ_j 可積分である．

（2）$\int f(x_1,x_2)\,d\mu_j(x_j)$ は x_i の関数として，μ_i 可積分である．

（3）$\int\left(\int f(x_1,x_2)\,d\mu_j(x_j)\right)d\mu_i(x_i)=\int f d(\mu_1\times\mu_2)$

証明：定理 2.12 より

$$\int\left(\int|f(x_1,x_2)|\,d\mu_j(x_j)\right)d\mu_i(x_i)=\int|f|\,d(\mu_1\times\mu_2)<\infty$$

だから，μ_i-$a.a.\,x_i$ に対して

$$\int|f(x_1,x_2)|\,d\mu_j(x_j)<\infty$$

となる．故に，（1）が成立する．また，

$$\int\left|\int f(x_1,x_2)\,d\mu_j(x_j)\right|d\mu_i(x_i)$$
$$\leqq\int\left(\int|f(x_1,x_2)|\,d\mu_j(x_j)\right)d\mu_i(x_i)<\infty$$

だから（2）が成立する．定理 2.12 より，非負実数値関数 f に対して（3）が成立する．これより，実数値関数について，また，複素数値関数についての結果が導かれる．　　　　　（証明終）

2.4　分布関数と測度

F を $\boldsymbol{R}$ 上の分布関数（1.6 節参照）とする．$\boldsymbol{R}$ の有限個の区間（開区間，閉区間，半開区間，無限区間を含む）の和として表せる集合の全体を $\mathcal{A}$ と表す．区間に対して

$$\lambda_F((a,b)) := F(b-0) - F(a)$$
$$\lambda_F((a,b]) := F(b) - F(a)$$
$$\lambda_F([a,b)) := F(b-0) - F(a-0)$$
$$\lambda_F([a,b]) := F(b) - F(a-0)$$

と定義し，$A \in \mathcal{A}$ に対して，A を

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$
$$A_i \cap A_j = \phi \qquad (\forall i \neq j)$$
$$A_i \text{ は区間} \qquad (i=1, \cdots, n)$$

と表すとき

$$\lambda_F(A) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_F(A_i)$$

と定義する．この定義は well defined であり，λ_F は集合体 $\mathcal{A}$ 上の有限加法的確率測度となる．また，λ_F は $\mathcal{A}$ 上完全加法的だから，$\sigma\mathcal{A}$ 上の確率測度に拡張される．$\sigma\mathcal{A}$ は $\boldsymbol{R}$ 上のボレル集合体となる．積分 $\int f d\lambda_F$ を

$$\int f dF \quad \text{または} \quad \int f(x) dF(x)$$

と書く．また，λ_F 可積分であることを dF 可積分という．

分布関数 $F(x)$ が密度関数 $p(x)$ をもつとき，すなわち，ルベーグ測度に関して可測な非負実数値関数 $p(x)$ が存在して

$$F(x)=\int_{(-\infty,x]} p(t)\,dt \qquad (\forall x\in \boldsymbol{R})$$

と表せるとき，任意の dF 可積分関数 f に対して

$$\int f dF=\int f(x)p(x)dx$$

が成立する．

〔**定理 2.14**〕 $\boldsymbol{R}$ 上の分布関数列 F_n $(n=1,2,\cdots)$ が分布関数 F に弱収束するとき，以下が成立する．

（1） 任意の $\varepsilon>0$ に対して，正数 M が存在して

$$\int_{[-M,M]} dF>1-\varepsilon \quad かつ \quad \int_{[-M,M]} dF_n>1-\varepsilon$$
$$(n=1,2,\cdots)$$

（2） 任度の有界連続関数 f：$\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int f dF_n=\int f dF$$

証明：

（1） F の不連続点はたかだか可算集合だから，x および $-x$ が F の連続点となるような $[0,\infty)$ 上の点 x の全体は，$[0,\infty)$ で稠密となる．また，

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=1 \quad かつ \quad \lim_{x\to\infty} F(-x)=0$$

だから，正の数 m で，m および $-m$ は F の連続点で，かつ

$$\int_{[-m,m]} dF=F(m)-F(-m)>1-\frac{\varepsilon}{3}$$

となるものが存在する．故に，n_0 が存在し，任意の $n>n_0$ に対して

$$|F_n(m)-F(m)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$|F_n(-m)-F(-m)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

が成立する．故に，

$$\int_{[-m,m]} dF_n>1-\varepsilon \qquad (\forall n=n_0+1, n_0+2,\cdots)$$

となる．また，各 $n=1, \cdots, n_0$ に対して

$$\int_{[-m_n, m_n]} dF_n > 1-\varepsilon$$

となる正数 m_n が存在する．故に，

$$M=\max\{m_1, \cdots, m_n, m\}$$

とおくとき，（1）が成立する．

（2） f は有界連続関数とする．$|f(x)| \leqq m$ $(\forall x \in \boldsymbol{R})$ となる m をとる．任意の $\varepsilon>0$ に対して，（1）より

$$\int_{[-M,M]} dF > 1-\frac{\varepsilon}{m} \quad \text{かつ} \quad \int_{[-M,M]} dF_n > 1-\frac{\varepsilon}{m}$$
$$(n=1, 2, \cdots)$$

が成立する M がとれる．また，M および $-M$ は F および F_n $(n=1, 2, \cdots)$ の連続点と仮定してよい．f は $[-M, M]$ 上で一様連続だから，$[-M, M]$ の分割

$$-M=\xi_0<\xi_1< \cdots <\xi_k=M$$

で，ξ_i $(i=0, 1, \cdots, k)$ は F の連続点，かつ，任意の $x, y \in [\xi_{i-1}, \xi_i]$ $(i=1, \cdots, k)$ に対して

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

が成立するようなものが存在する．このとき

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int f dF_n - \int f dF\right| \\
&\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\left|\int_{(-M,M]} f dF_n - \int_{(-M,M]} f dF\right| + 2\varepsilon \\
&\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left|\int_{(\xi_{i-1},\xi_i]} f dF_n - \int_{(\xi_{i-1},\xi_i]} f dF\right| + 2\varepsilon \\
&\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k} |f(\xi_i)(F_n(\xi_i)-F_n(\xi_{i-1}))-f(\xi_i)(F(\xi_i)-F(\xi_{i-1}))| \\
&\quad + \varlimsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon(F_n(\xi_i)-F_n(\xi_{i-1}))+\sum_{i=1}^{k}\varepsilon(F(\xi_i)-F(\xi_{i-1}))+2\varepsilon \\
&\leqq 2\varepsilon(F(M)-F(-M))+2\varepsilon \leqq 4\varepsilon
\end{aligned}$$

が成立し，$\varepsilon>0$ は任意だから

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int f dF_n - \int f dF\right| = 0$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\int f dF_n = \int f dF$$

を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の実数値確率変数 X の分布関数を F_X と書く．

〔定理 2.15〕　$\boldsymbol{R}$ 上の任意の dF_X 可積分関数 f に対して

$$\int f dF_X = E(f(X))$$

が成立する．

証明：任意の $-\infty \leqq a \leqq b \leqq \infty$ に対して

$$\begin{aligned}\int 1_{(a,b)} dF_X &= F_X(b-0) - F_X(a) \\ &= P(X<b) - P(X \leqq a) \\ &= P(a<X<b) \\ &= E(1_{(a,b)}(X))\end{aligned}$$

が成立する．区間 $(a, b]$，$[a, b)$，$[a, b]$ に対しても同様の結果が成立する．故に，有限個の区間の和と書ける集合 A に対して

$$\int 1_A dF_X = E(1_A(X))$$

が成立する．さらに，このような性質をもつ集合 A の全体は単調族だから定理 2.3 より，任意のボレル集合 A に対して，これが成立する．さらに，集合 B が dF_X 可測集合のとき，ボレル集合 A, C で，$A \subset B \subset C$ かつ

$$\int 1_{C \setminus A} dF_X = 0$$

となるものが存在する．このとき，

$$\int 1_A dF_X = \int 1_B dF_X \quad \text{かつ} \quad E(1_A(X)) = E(1_B(X))$$

より

$$\int 1_B dF_X = E(1_B(X))$$

を得る．これより，f が dF_X に関する単関数のとき，

$$\int f dF_X = E(f(X))$$

が成立する．さらに，$f: \boldsymbol{R} \to [0, \infty]$ が dF_X 可測関数のとき，f は単関数列の単調増加極限として表せるから，f に対して上式が成立する．これより，一般の dF_X 可積分な複素数値関数 f についても上式が成立することとなる．　(証明終)

単調増加で右連続な関数 $F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は，$\boldsymbol{R}$ 上に σ 有限な測度を定義する．このような関数を**広義の分布関数**と呼ぶ．広義の分布関数 F は，$F(\infty) - F(-\infty) \leqq 1$ を満すとき，**劣分布関数**と呼ばれる．また，$F(\infty) - F(-\infty) < \infty$ のとき，**有限**であるという．また，$\boldsymbol{R}$ 上のボレル集合体上定義される σ 有限な測度は，$\boldsymbol{R}$ 上の**ボレル測度**と呼ばれる．

2.5 特性関数

$\boldsymbol{R}$ 上の分布関数 F が与えられたとき，その**特性関数** φ_F を

$$\varphi_F(t) = \int e^{itx} dF(x) \qquad (t \in \boldsymbol{R})$$

と定義する．また，実数値確率変数 X が与えられたとき，それの分布関数 F_X の特性関数 φ_{F_X} を φ_X と書き，X の**特性関数**と呼ぶ．すなわち

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \int e^{itx} dF_X(x) \\ &= E(e^{itx}) \qquad (t \in R)\end{aligned}$$

となる．

〔定理 2.16〕　分布関数 F の特性関数 φ_F は $\varphi_F(0) = 1$，$|\varphi_F(t)| \leqq 1$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$ を満す連続関数である．

証明：

$$\varphi_F(0) = \int dF = F(\infty) - F(-\infty) = 1$$

$$
\begin{aligned}
|\varphi_F(t)| &= \left|\int e^{itx} dF(x)\right| \\
&\leqq \int |e^{itx}|\, dF(x) \\
&= \int dF(x) = 1
\end{aligned}
$$

となる．また，$t_n \to t$ のとき，任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，$e^{it_n x} \to e^{itx}$ だから，ルベークの有界収束定理より

$$
\begin{aligned}
\varphi_F(t) &= \int e^{itx} dF(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int e^{it_n x} dF(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \varphi_F(t_n)
\end{aligned}
$$

となり，φ_F は連続関数となる． （証明終）

〔**定理 2.17**〕 分布関数列 F_n $(n=1, 2, \cdots)$ が分布関数 F に弱収束するとき，任意の正数 M に対して，$n \to \infty$ のとき，$\varphi_{F_n}(t)$ は $\varphi_F(t)$ に $t \in [-M, M]$ に関して一様に収束する．

証明：任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$
\int_{[-m,m]} dF > 1-\varepsilon \quad かつ \quad \int_{[-m,m]} dF_n > 1-\varepsilon
$$
$$
(n=1, 2, \cdots)
$$

を満す正数 m が存在する．さらに，m および $-m$ は F および F_n $(n=1, 2, \cdots)$ の連続点であると仮定してよい．このとき，$[-m, m]$ の分割

$$
-m = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_k = m
$$

で，ξ_j $(j=0, 1, \cdots, k)$ は F の連続点，かつ，任意の $x, y \in [\xi_{j-1}, \xi_j]$ $(j=1, \cdots, k)$ および $t \in [-M, M]$ に対して

$$
|e^{itx} - e^{ity}| < \varepsilon
$$

を満すものが存在する．このとき，任意の $t \in [-M, M]$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_{F_n}(t) - \varphi_F(t)| \\
&\quad \leqq \left| \int_{(-m,m]} e^{itx} dF_n(x) - \int_{(-m,m]} e^{itx} dF(x) \right| + 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{k} \left| \int_{(\xi_{j-1},\xi_j]} e^{itx} dF_n(x) - \int_{(\xi_{j-1},\xi_j]} e^{itx} dF(x) \right| + 2\varepsilon$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{k} \left| \int_{(\xi_{j-1},\xi_j]} e^{it\xi_j} dF_n(x) - \int_{(\xi_{j-1},\xi_j]} e^{it\xi_j} dF(x) \right|$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \varepsilon (F_n(\xi_j) - F_n(\xi_{j-1})) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon (F(\xi_j) - F(\xi_{j-1})) + 2\varepsilon$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{k} |F_n(\xi_j) - F(\xi_j) - F_n(\xi_{j-1}) + F(\xi_{j-1})| + 4\varepsilon$$

が成立する．ここで，$n \to \infty$ のとき，

$$\sum_{j=1}^{k} |F_n(\xi_j) - F(\xi_j) - F_n(\xi_{j-1}) + F(\xi_{j-1})| \longrightarrow 0$$

となるから，$t \in [-M, M]$ と無関係に n_0 が選べて，任意の $n \geqq n_0$ に対して

$$|\varphi_{F_n}(t) - \varphi_F(t)| \leqq 5\varepsilon$$

が成立する．故に，$\varphi_{F_n}(t) \to \varphi_F(t)$ が $t \in [-M, M]$ に関して一様に成立する．　(証明終)

〔定理 2.18〕　F を平均 μ，分散 v の正規分布関数 $N(\mu, v)$ とするとき

$$\varphi_F(t) = e^{i\mu t - \frac{vt^2}{2}} \qquad (t \in \boldsymbol{R})$$

となる．

証明：

$$\varphi_F(t) = \int e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int e^{-\frac{1}{2v}(x-\mu-ivt)^2 + i\mu t - \frac{vt^2}{2}} dx$$

$$= e^{i\mu t - \frac{vt^2}{2}}$$

(証明終)

劣分布関数 F に対応する測度 dF は

$$\int dF = F(\infty) - F(-\infty) \leqq 1$$

を満している．劣分布関数 F と G に対して，$dF = dG$ が成立すること

と，任意の $-\infty<x<y<\infty$ に対して

$$F(y)-F(x)=G(y)-G(x)$$

が成立することと同値である．劣分布関数 F に対しても，**特性関数** φ_F を

$$\varphi_F(t)=\int e^{itx}dF(x) \qquad (t\in\boldsymbol{R})$$

と定義する．

関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$ の**台**とは，集合 $\{x\in\boldsymbol{R};\ f(x)\neq 0\}$ の閉包を意味する．

〔定理 2.19〕 劣分布関数 F の特性関数を φ_F とする．f は $\boldsymbol{R}$ 上ルベーク測度に関して可積分な任意の一様連続関数とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ で，$|x-y|<\delta$ となる任意の $x,y\in\boldsymbol{R}$ に対して，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ が成立するものをとる．

また，$|f(x)|\leqq M$ $(\forall x\in\boldsymbol{R})$ とする．このとき，任意の $v>0$ に対して

$$\left|\int f dF-\frac{1}{2\pi}\iint f(x)\varphi_F(t)e^{-itx-\frac{t^2}{2v}}\,dtdx\right|$$
$$\leqq\varepsilon+4\,Me^{-\frac{\delta^2 v}{2}}$$

が成立する．故に，

$$\int f dF=\frac{1}{2\pi}\lim_{v\to\infty}\iint f(x)\varphi_F(t)e^{-itx-\frac{t^2}{2v}}\,dtdv$$

が成立し，dF は φ_F によって決定される．

証明：フビニの定理を用いて

$$\iint f(x)\varphi_F(t)e^{-itx-\frac{t^2}{2v}}dtdx$$
$$=\iint f(x)\left(\int e^{ity}dF(y)\right)e^{-itx-\frac{t^2}{2v}}\,dtdx$$
$$=\iint f(x)\left(\int e^{it(y-x)-\frac{t^2}{2v}}\,dt\right)dxdF(y)$$
$$=\iint f(x)\sqrt{2\pi v}\,e^{-\frac{v(y-x)^2}{2}}\,dxdF(y)$$
$$=2\pi\iint f(x)dN\left(y,\frac{1}{v}\right)(x)dF(y)$$

を得る．故に，

$$\left|\int f dF - \frac{1}{2\pi}\iint f(x)\varphi_F(t)e^{-itx-\frac{t^2}{2v}}\,dtdx\right|$$

$$= \left|\int f dF - \iint f(x)\,dN\left(y, \frac{1}{v}\right)(x)\,dF(y)\right|$$

$$= \left|\iint (f(y) - f(x))\,dN\left(y, \frac{1}{v}\right)(x)\,dF(y)\right|$$

$$\leqq \iint |f(y) - f(x)|\,dN\left(y, \frac{1}{v}\right)(x)\,dF(y)$$

$$\leqq \int \left(\varepsilon + 2M\int_{\{x;\,|x-y|\geqq\delta\}} dN\left(y, \frac{1}{v}\right)(x)\right)dF(y)$$

$$\leqq \varepsilon + 4M\int_{\delta\sqrt{v}}^{\infty} dN(0, 1)$$

$$\leqq \varepsilon + \frac{4M}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2e^{-\frac{\delta^2 v}{2}}$$

$$\leqq \varepsilon + 4\,Me^{-\frac{\delta^2 v}{2}}$$

が成立する.

分布関数 F と G に対して，$\varphi_F = \varphi_G$ が成立するとき，任意の台が有界な連続関数 f に対して，上式で $v \to \infty$ とし，$\varepsilon \downarrow 0$ とすると

$$\int f dF = \int f dG$$

を得る. 故に，任意の $-\infty < x < y < \infty$ に対して

$$F(y) - F(x) = \lim_{n\to\infty}\int f_n dF$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int f_n dG = G(y) - G(x)$$

が成立する. ただし

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqq x) \\ n(t - x) & \left(x < t \leqq x + \frac{1}{n}\right) \\ 1 & \left(x + \frac{1}{n} < t \leqq y\right) \\ n\left(-t + y + \frac{1}{n}\right) & \left(y < t \leqq y + \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(t > y + \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

とした．故に，$dF=dG$ が成り立つ．　(証明終)

〔**定理 2.20**〕　分布関数 F_n $(n=1,2,\cdots)$ の特性関数 $\varphi_{F_n}(t)$ が任意の $t\in\boldsymbol{R}$ に対して，$n\to\infty$ のとき収束するとする．このとき，F_n は $n\to\infty$ のとき，ある分布 F に弱収束し

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{F_n}(t)=\varphi_F(t) \qquad (\forall t\in\boldsymbol{R})$$

が成り立つ．

証明：$\boldsymbol{R}$ の中の有理数の全体を $\boldsymbol{Q}$ とする．$\boldsymbol{Q}$ は可算集合で，$\boldsymbol{R}$ の中で稠密である．任意の分布関数列 G_n $(n=1,2,\cdots)$ に対して，部分列 $\{n'\}\subset\{n\}$ で，任意の $y\in\boldsymbol{Q}$ に対して

$$I(y):=\lim_{n'\to\infty}G_{n'}(y)$$

が存在するようなものがとれる．このとき，任意の $x\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$G(x)=\inf_{\substack{y>x\\ y\in Q}}I(y)$$

と定義する．このとき，G は劣分布関数となる．さらに，G の任意の連続点 $x\in\boldsymbol{R}$ において

$$\lim_{n'\to\infty}G_{n'}(x)=G(x)$$

が成立する．このとき，有界な台をもつ $\boldsymbol{R}$ 上の任意の連続関数 f に対して

$$\lim_{n'\to\infty}\int fdG_{n'}=\int fdG$$

となることが定理 2.14（2）の証明と同様に示される．このとき，$G_{n'}$ は G に**漠収束**するという．

F_n が $n\to\infty$ のとき，ある劣分布関数に漠収束することを示す．もしこれを否定すると，部分列 $\{n'\}$ と $\{n''\}$ および劣分布関数 F と G が存在して，$F_{n'}$ は F に，$F_{n''}$ は G に漠収束し，かつ，$dF\neq dG$ が成立する．このとき，有界な台をもち 2 回連続微分可能な関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ で，

$$\lim_{n'\to\infty}\int fdF_{n'}=\int fdF\neq\int fdG=\lim_{n''\to\infty}\int fdF_{n''}$$

を満すものが存在する．すなわち，

$$\lim_{n\to\infty}\int f dF_n$$

が存在しない．

他方，任意の $t\neq 0$ に対して

$$\hat{f}(t):=\int f(x)e^{-itx}dx=-\frac{1}{t^2}\int f''(x)e^{-itx}dx$$

となるから，正の定数 A, B が存在して，任意の $t\in \boldsymbol{R}$ に対して

$$|\hat{f}(t)|\leqq \min\left\{A, \frac{B}{t^2}\right\}$$

が成立し，$\hat{f}(t)$ はルベーク測度に関して可積分となる．定理 2.19 と 2.13 および 2.11 より

$$\begin{aligned}\int f dH &= \frac{1}{2\pi}\lim_{v\to\infty}\iint f(x)\varphi_H(t)e^{-itx-\frac{t^2}{2v}}dtdx\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{v\to\infty}\int \hat{f}(t)\varphi_H(t)e^{-\frac{t^2}{2v}}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(t)\varphi_H(t)dt\end{aligned}$$

が任意の分布関数 H に対して成立する．故に，定理 2.11 を用いて

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int f dF_n &= \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int \hat{f}(t)\varphi_{F_n}(t)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(t)\lim_{n\to\infty}\varphi_{F_n}(t)dt\end{aligned}$$

が存在することとなり矛盾する．以上より，F_n は $n\to\infty$ のとき，ある劣分布関数 F に漠収束する．F が分布関数であることを示す．

任意の $u>0$ に対して，$f_u(x)=e^{-\frac{x^2}{2u}}$ とおく．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，$|x-y|<\delta$ を満す任意の $x, y\in \boldsymbol{R}$ に対して $|f_u(x)-f_u(y)|<\varepsilon$ が成立する．定理 2.19 より，任意の $n=1, 2, \cdots$ に対して

$$\left|\int f_u dF_n-\int f_u dF\right|$$

$$\leqq 2\varepsilon + 8e^{-\frac{\delta^2 v}{2}} + \frac{1}{2\pi}\left|\int \hat{f}_u(t)(\varphi_{F_n}(t) - \varphi_F(t))e^{-\frac{t^2}{2v}}dt\right|$$

$$\leqq 2\varepsilon + 8e^{-\frac{\delta^2 v}{2}} + \left|\int (\varphi_{F_n}(t) - \varphi_F(t))e^{-\frac{t^2}{2v}}dN\left(0, \frac{1}{u}\right)(t)\right|$$

となる．故に，$v \to \infty$ としたのち $\varepsilon \downarrow 0$ とすることにより

$$\left|\int f_u dF_n - \int f_u dF\right|$$

$$\leqq \int |\varphi_{F_n} - \varphi_F| dN\left(0, \frac{1}{u}\right)$$

が成立する．ここで，$u \to \infty$ とすると，

$$\left|1 - \int dF\right| \leqq |\varphi_{F_n}(0) - \varphi_F(0)|$$

となり，$n \to \infty$ とすることにより

$$\int dF = 1$$

を得る．これより，F は分布関数となる． （証明終）

〔**定理 2.21**〕

（1） 任意の実数値確率変数 X に対して，$\varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$ が成立する．とくに，X が原点に関して対称に分布するとき，すなわち，$F_X(x) + F_X(-x-0) = 1 (\forall x \in \boldsymbol{R})$ のとき，φ_X は実数値となる．

（2） 実数値確率変数 X が P 可積分のとき，

$$\varphi_X{}'(0) = i\int X dP$$

が成立する．

（3） 実数値確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$ が独立のとき，

$$\varphi_{\sum_{j=1}^n X_j}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t) \qquad (\forall t \in \boldsymbol{R})$$

が成立する．

証明：

（1） 任意の t に対して

$$\varphi_{-X}(t) = E(e^{-itX}) = E(\overline{e^{itX}})$$

$$=\overline{E(e^{itX})}=\overline{\varphi_X(t)}$$

を得る．X が原点に関して対称に分布するとき，X と $-X$ は同じ分布をもつから $\varphi_X=\varphi_{-X}$ となる．故に，上の結果より，φ_X は実数値となる．

（2） 平均値定理と定理 2.11 より

$$\begin{aligned}\varphi_X{}'(0)&=\lim_{h\to 0}E\left(\frac{e^{ihX}-1}{h}\right)\\&=\lim_{h\to 0}E(-X\sin h\xi X+i\,X\cos h\zeta X)\\&=E(i\,X)\qquad(0<\xi<1,\ 0<\eta<1)\end{aligned}$$

を得る．

（3）
$$\begin{aligned}\varphi_{\sum_{j=1}^{n}X_j}(t)&=E\left(\prod_{j=1}^{n}e^{itX_j}\right)\\&=\prod_{j=1}^{n}E(e^{itX_j})=\prod_{j=1}^{n}\varphi_{X_j}(t)\end{aligned}$$
（証明終）

同じ分布関数 F をもつ独立な確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$ が与えられている．また，Y は平均 λ のポアソン分布をもつ確率変数で，確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$ とは独立とする．このとき，確率変数 Z を

$$Z=X_1+\cdots+X_Y$$

と定義する．Z の分布を**複合ポアソン分布**と呼び $P(\lambda, F)$ と書く．とくに，F が一点 1 に集中する分布のとき，$P(\lambda, F)=P(\lambda)$ となる．

〔定理 2.22〕 複合ポアソン分布 $P(\lambda, F)$ の特性関数 φ は次式で与えられる．

$$\varphi(t)=\exp\left(\lambda\int(e^{itx}-1)\,dF(x)\right)\qquad(t\in\boldsymbol{R})$$

証明：

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=E(e^{it(X_1+\cdots+X_Y)})\\&=\sum_{n=0}^{\infty}E(e^{it(X_1+\cdots+X_n)}\mid Y=n)\ P(Y=n)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}E(e^{it(X_1+\cdots+X_n)})\ P(Y=n)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}E(e^{itX_j})\cdot P(Y=n)\end{aligned}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int e^{itx}dF(x)\right)^n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$=e^{-\lambda}\exp\lambda\int e^{itx}dF(x)$$

$$=\exp\left(\lambda\int(e^{itx}-1)\,dF(x)\right)$$

3

超 準 確 率 論

3.1 形式体系と解釈

われわれが数学で用いる論理記号は一定の意味を担っており，われわれはこれらを用いて数学を表現している．そこで，便宜的に日常言語が用いられることもあるが，その場合には，数学の術語としての意味が再定義され，その枠内でのみ使用されるのであるから，日常言語は論理記号に書き換えられる．結局のところ，定まった意味をもつ記号列として数学は表現されることになる．

論理記号は，数学の対象を表す記号，対象間の基本関係を表す記号，論理的なつながりを表す記号，および，変数記号に分類される．ここでは，対象として，常に集合を考え，基本関係記号は，等号＝と所属関係記号∈とする．通常の数学で用いられる関数，演算，写像，関係，命題は集合と同一視し対象と考える．例えば，$\boldsymbol{R}$ 上の演算＋は集合

$$\text{“}+\text{”}=\{(a,b,c)\in\boldsymbol{R}^3;\ a+b=c\}$$

と同一視する．したがって，$a+b$ は「$(a,b,c)\in$“＋” を満す c 」という記述を略記したものと考える．また，$\boldsymbol{R}$ 上の関係$<$ は集合

$$\text{“}<\text{”}=\{(a,b)\in\boldsymbol{R}^2;\ a<b\}$$

と同一視する．したがって $a<b$ は「$(a,b)\in$“$<$”」という記述を略記したものと考える．

論理的なつながりを表す記号には，$\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ などがある．これらの記号の“文法規則”に従う配列は定まった意味をもつ命題

となる．これを**論理式**と呼ぶ．例えば，

$$(\forall x)(\forall y)[x\in \boldsymbol{R}\wedge y\in \boldsymbol{R}\wedge x<y \Longrightarrow (\exists z)(z\in \boldsymbol{R}\wedge x<z\wedge z<y)]$$

は，実数の稠密性を表す論理式である．ここでは，変数記号 x, y, z が用いられているが，いずれも“∀”または“∃”を伴なうものである．このような変数を**束縛変数**と呼ぶ．それ以外の変数は**自由変数**と呼ばれる．例えば，論理式

$$x\in \boldsymbol{R}\wedge(\forall y)(\forall z)\left[y\in \boldsymbol{Z}\wedge z\in \boldsymbol{Z}\Longrightarrow \neg x=\frac{y}{z}\right]$$

は自由変数 x を含み，“x は無理数である”ことを意味している．自由変数を含まない論理式は**閉論理式**と呼ばれる．

このような論理式は，意味抜きで記号の列と考えた形式的側面と意味に着目した意味的側面の二面性をもっている．数学における証明を形式的側面からとらえることができる．すなわち，論理式の集まりから新たな論理式を“形式的に”導き出す規則として**推論規則**を与えることができる．この推論規則を用いて，閉論理式の集まりとして表現された公理系から定理を導くことができる．このように意味抜きで考察される論理記号の体系と公理系，および，これに推論の規則を適用して導き出される閉論理式——定理——の全体を**形式体系**と呼ぶ．

形式体系に意味を付与するには，考察の対象全体 U を確定し，対象を表す記号の各々に U の元を対応させ意味を与える．さらに，基本関係記号に，U 上の関係を対応させるとよい．論理的なつながりを表す記号には，通常の意味をもたせることにより，論理式の意味が確定する．ただし，束縛変数の動く範囲は U と考える．われわれは，U として，集合の集まりを考え，記号“＝”と“∈”には，U での通常の意味を与えるものとする．それゆえ，U と対象記号全体から U の中への写像の組が論理式に意味を定める．これを形式体系の**解釈**と呼び，U を**解釈空間**と呼ぶ．また，このような解釈を備えた論理式を **U 上の論理式**と呼ぶ．

形式体系の解釈が**モデル**であるとは，この解釈の下で公理系が真であることを意味する．閉論理式は一定の解釈の下で真偽が確定する．モデルにおいては，すべての定理が真となる．現実の数学の体系においては，対象が先に与えられ，これの形式化としての形式体系は，もともとの意味と不可分に結び付いている．いずれにせよ，形式体系を中心に考えれば，これは一つのモデルとなっている．これは**標準モデル**と呼ばれる．

われわれは，選択公理を付加した通常の集合論とそれの標準モデルを出発点とする．ただし，正則性公理は仮定しない．この公理系を $ZFC\backslash R$ と書く．この標準モデルにおける解釈空間を U^u とする．U^u の元と，それを表す論理記号は同一視する．ここでは，すべての対象が集合として扱われ，これらの間の関係や関数，演算，命題なども集合として与えられ，集合間の所属関係により，対象の性質が記述される．この意味で，個々の複素数も集合として与えられ，これら全体の集合として，$\boldsymbol{C}$ が構成される．われわれは，$\boldsymbol{C}$ を既知のものと考え，個々の複素数の集合としての構造には立入らないものとする．すなわち，U^u の元 $\boldsymbol{C}$ とその諸性質が公理として与えられ，$\boldsymbol{C}$ の各元は U^u の元ではあるが集合とは考えないこととする．このような変更を施した形式体系およびそれの標準モデルを $\underline{ZFC\backslash R+\boldsymbol{C}}$ と呼ぶ．

われわれは，$ZFC\backslash R+\boldsymbol{C}$ の標準モデル以外の解釈で以下の条件を満すものを考える．解釈空間を U^i とし，U^u の元 a の新しい解釈（**＊解釈**と呼ぶ）を ${}^*a \in U^i$ と書く．

Ⅰ．＊は U^u から U^i への単射である．

Ⅱ．$\boldsymbol{C} = {}^*\boldsymbol{C} \cap U^u$ かつ＊は $\boldsymbol{C}$ 上恒等写像となる．

Ⅲ．U^u 上真の閉論理式は新しい解釈においても真となる（**移行の原理**）．

Ⅳ．$U^i \backslash {}^*\boldsymbol{C}$ に属す集合の可算列は，有限交差的なら交差的である（**可算飽和性**）．

このような解釈は，**可算飽和モデル**と呼ばれる．条件Ⅳから，無限小

数，無限大数といった理想元の存在が導かれる．なぜなら，U^u に属す集合 $(0,1/n)$ の＊解釈 $^*(0,1/n)$ の $n=1,2,\cdots$ に対する可算列は，有限交差的であるから交差的となる．任意の元 $\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}{}^*(0,1/n)$ は $0<\xi<1/n$ $(\forall n=1,2,\cdots)$ を満しており，正の無限小数となる．

3.2 可算飽和モデルの構成

前節で述べた可算飽和モデルの存在と性質を論じる．そのために，$N=\{0,1,2,\cdots\}$ 上のフレッシェ超フィルター $\mathcal{F}$ を用いる．ここで，$\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(N)$ が**フレッシェ超フィルター**であるとは，任意の $A,B\subset N$ に対して

(1) A が有限集合（空集合も含む）のとき，$A\notin\mathcal{F}$

(2) $A\in\mathcal{F}$ かつ $A\subset B$ のとき，$B\in\mathcal{F}$

(3) $A\in\mathcal{F}$ かつ $B\in\mathcal{F}$ のとき，$A\cap B\in\mathcal{F}$

(4) $A\notin\mathcal{F}$ のとき，$A^c\in\mathcal{F}$

が成立することをいう．このような $\mathcal{F}$ の存在は選択公理を用いて示される．

フレッシェ超フィルター $\mathcal{F}$ は，さらに，次の性質をもつ．k は勝手な正整数とする．

(5) $\bigcup_{j=1}^{k}N_k\in\mathcal{F}$ のとき，$N_j\in\mathcal{F}$ となる j が存在する．

(6) (5)において，とくに，$N_1,\cdots,N_k$ が互いに共通部分をもたないとき，このような j は一意的である．

(7) $N_j\in\mathcal{F}\ (j=1,\cdots,k)$ のとき，$\bigcap_{j=1}^{k}N_j\in\mathcal{F}$

(8) $N_j\notin\mathcal{F}\ (j=1,\cdots,k)$ のとき，$\bigcup_{j=1}^{k}N_j\notin\mathcal{F}$

(9) 有限集合の補集合は $\mathcal{F}$ に属す．

$U^u\backslash C$ (C の元はこれに属さないが，C 自身はこれに属す) の元 S が与えられたとき，S^N 上の同値関係 $\sim_{\mathcal{F}}$ を以下のように定義する：

$$(a_n),\ (b_n)\in S^N \text{ に対して}$$

$$(a_n)\sim_{\mathcal{F}}(b_n)\Longleftrightarrow\{n\in N;\ a_n=b_n\}\in\mathcal{F}$$

これが同値関係となることは，$\mathcal{F}$ の性質(3)から容易にわかる．S^N の

元 (a_n) が属す同値類を $[a_n]$ と記す．また，$^*S=S^N/\sim_{\mathcal{F}}$ と定義する．すなわち，

$$^*S=\{[a_n];\ (a_n)\in S^N\}$$

とする．さらに，

$$U^i=\bigcup_{S\in U^u\backslash C}{}^*S$$

と定義する．U^i の任意の元は，適当な $S\in U^u\backslash C$ と $(a_n)\in S^N$ が存在して，$[a_n]$ と書ける．また，U^i の元 $[a_n]$ と $[b_n]$ について

$$[a_n]=[b_n] \iff \{n\in N;\ a_n=b_n\}\in\mathcal{F}$$

が成立する．

$U^i\backslash{}^*C$ の元 $[a_n]$ は集合

$$\{[b_n]\in U^i;\ \{n\in N;\ b_n\in a_n\}\in\mathcal{F}\}$$

と考える．すなわち，$U^i\backslash{}^*C$ の元 $[a_n]$ と $[b_n]\in U^i$ に対して

$$[b_n]\in[a_n] \iff \{n\in N;\ b_n\in a_n\}\in\mathcal{F}$$

が成立する．この集合としての定義が well defined であることは，$\mathcal{F}$ に関する性質（3）から導かれる．

U^i の元 $[a, a, \cdots]$，すなわち，$a_n=a$ $(\forall n\in N)$ となる $[a_n]$ を $^*a$ と記す．これは，$S\in U^u\backslash C$ に対して最初に定義した集合としての $^*S$ の記法と合致する．$a\in C$ のとき，$^*a$ と a を同一視する．

U^u の元 a に対して U^i の元 $^*a$ を対応させる写像は U^u から U^i の中への単射で，かつ，C に制限すると恒等写像となっている．さらに，$C={}^*C\cap U^u$ が成立している．

U^u 上の論理式 φ が与えられたとき，その＊解釈 $^*\varphi$ とは，論理式 φ に表れる U^u のすべての元 a を $^*a$ に置き換えた U^i 上の論理式を意味する．ただし，束縛変数の動く範囲は，φ では U^u，$^*\varphi$ では U^i となる．

〔定理 3.1〕（移行の原理）　U^u 上の閉論理式 φ が真であることと，その＊解釈 $^*\varphi$ が真であることは同値となる．

証明：文献［1］を見よ．　（証明終）

〔定理 3.2〕（可算飽和性）　$S_j\in U^i\backslash{}^*C$ $(j=1, 2, \cdots)$ が

$$\bigcap_{j=1}^{k} S_j \neq \phi \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

を満すとき

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j \neq \phi$$

となる.

証明：一般性を失なわず，$S_j=[S_n{}^j]$ で $S_n{}^j \in U^u \backslash C$ （$\forall j=1, 2, \cdots$; $\forall n \in \boldsymbol{N}$）と考えてよい．このとき，$\mathscr{F}$ の性質（7）より

$$\bigcap_{j=1}^{k} S_j = \left[\bigcap_{j=1}^{k} S_n{}^j\right] \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

が成立する．また，

$$\bigcap_{j=1}^{k} S_j \neq \phi \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

だから，代表元（$S_n{}^j$）を $j=1$ から始めて順次とりかえていくことにより

$$\bigcap_{j=1}^{k} S_n{}^j \neq \phi \qquad (\forall n \in \boldsymbol{N}, \ \ \forall k=1, 2, \cdots)$$

と仮定してよい．このとき，

$$a_n \in \bigcap_{j=1}^{n+1} S_n{}^j \qquad (n \in \boldsymbol{N})$$

とし，$a=[a_n]$ とおくとき，任意の $j=1, 2, \cdots$ に対して

$$\{n \in \boldsymbol{N};\ \ a_n \in S_n{}^j\} \supset \{j-1, j, \cdots\} \in \mathscr{F}$$

が成立するから，$a \in S_j$ （$\forall j=1, 2, \cdots$）となり，$\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j \neq \phi$ を得る．

（証明終）

3.3 W′UNST の公理系

前節で論じたように，U^i は U^u の可算飽和モデルとなる．われわれは，このようにして得られた U^u と U^i の両方を含む世界 U を考え，それを公理化する．

〔公理 1〕 U において，$ZFC \backslash R + {}^*C$ の公理系が成立する．

〔公理 2〕 U^u において，$ZFC \backslash R + C$ の公理系が成立する．

〔公理 3〕　U^i は U^u の可算飽和モデルで，この解釈は写像 $*$ で与えられる．すなわち，3.1 節の I ～Ⅳが成立する．

〔公理 4〕　$a\in U^u\backslash C$ かつ $b\subset a$ のとき，$b\in U^u$．また，$a\in U^u\backslash C$ かつ $b\in a$ のとき，$b\in U^u$．

〔公理 5〕　$a\in U^i\backslash {}^*C$ かつ $b\in a$ のとき，$b\in U^i$．

以上の公理系を **W′UNST** と呼ぼう．これは河合徹氏の WUNST を少し変形したものである．この公理系の無矛盾性は，ZFC の無矛盾性を前提に示される．この公理系から導かれる性質をいくつか述べる．$U^s=\{{}^*a;\ a\in U^u\}$ と書く．

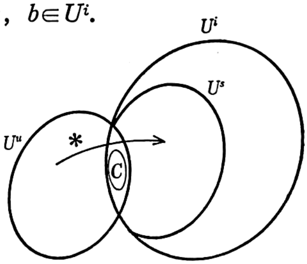


図 3.1

〔定理 3.3〕　$A=\{a_1, \cdots, a_n\}$ が U^u に属す有限集合のとき，${}^*A=\{{}^*a_1, \cdots, {}^*a_n\}$ が成立する．故に，C の元からなる有限集合 A に対して，${}^*A=A$ が成立する．さらに，このような A または C の元からなる有限集合 B に対しても ${}^*B=B$ が成立する．一般に，有限回のこのような操作からできる集合 B に対して，${}^*B=B$ が成立する．

証明：U^u 上の閉論理式

$$(\forall x)[x\in A \Longleftrightarrow x=a_1\vee\cdots\vee x=a_n]$$

は真だから，これの $*$ 解釈

$$(\forall x)[x\in {}^*A \Longleftrightarrow x={}^*a_1\vee\cdots\vee x={}^*a_n]$$

も真である．故に，${}^*A=\{{}^*a_1, \cdots, {}^*a_n\}$ となる．　(証明終)

〔定理 3.4〕　$A\in U^u$ が無限集合のとき，$\{{}^*a;\ a\in A\}\subsetneqq {}^*A$ が成立する．さらに，${}^*A\backslash\{{}^*a;\ a\in A\}$ の任意の元は U^s に属さない．

証明：$\{{}^*a;\ a\in A\}\subset {}^*A$ は移行の原理より導かれる．すなわち，$a\in A$ のとき，この $*$ 解釈 ${}^*a\in {}^*A$ が成立する．また，$b\in {}^*A\backslash\{{}^*a;\ a\in A\}$ とするとき，$b\notin U^s$ となることを示す．もし，$b={}^*a$ となる $a\in U^u$ が存在したとする．このとき，${}^*a=b\in {}^*A$ だから，移行の原理より $a\in A$ となり，仮定に反す．故に，b は U^s に属さない．

次に，$^*A\backslash\{^*a;\ a\in A\}$ が空集合でないことを示す．A の相異なる元に番号を付し，$a_1, a_2, \cdots$ とする．また，$A_n=\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$ $(n=1,2,\cdots)$ と定義する．このとき，$^*A_n (n=1,2,\cdots)$ は U^i に属す集合の可算列で，有限交差性をもつ．故に，可算飽和性より，交差的となり，$b\in\bigcap_{n=1}^{\infty}{}^*A_n$ が存在する．明らかに，$b\in{}^*A_1\subset{}^*A$ であるが，$a_m\notin A_{m+1}$ だから $^*a_m\notin{}^*A_{m+1}$ となり，$^*a_m\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}{}^*A_n (m=1,2,\cdots)$ が成立する．故に，b はいずれの $^*a_m (m=1,2,\cdots)$ とも一致せず，$b\in{}^*A_1\backslash\{^*a;\ a\in A_1\}$ となり，すでに証明したように $b\notin U^s$ が成立する．故に，$b\in{}^*A\backslash\{^*a;\ a\in A\}$ となる．　(証明終)

〔**定理 3.5**〕　A, B を U^u に属す集合とするとき，

$$^*(A\cup B)={}^*A\cup{}^*B$$
$$^*(A\cap B)={}^*A\cap{}^*B$$
$$^*(A\backslash B)={}^*A\backslash{}^*B$$

が成立する．また，$a_1, \cdots, a_n$ を U^u の有限個の元とするとき，

$$^*(a_1, \cdots, a_n)=(^*a_1, \cdots, {}^*a_n)$$

が成立する．また，$A_1, \cdots, A_N$ を U^u に属す有限個の集合とするとき，

$$^*(A_1\times\cdots\times A_n)={}^*A_1\times\cdots\times{}^*A_n$$

が成立する．

証明：前半は移行の原理より明らか．順序対 $(a_1, \cdots, a_n)$ は $\{1, \cdots, n\}$ からの写像 $i\longmapsto a(i)=a_i$ $(i=1, \cdots, n)$ と考える．このとき，$^*a$ は $^*\{1, \cdots, n\}=\{1, \cdots, n\}$ 上の写像で $(^*a)(i)={}^*(a(i))={}^*a_i$ となるから，$^*(a_1, \cdots, a_n)=(^*a_1, \cdots, {}^*a_n)$ が成立する．故に，$^*(A_1\times\cdots\times A_n)={}^*A_1\times\cdots\times{}^*A_n$ も成立する．　(証明終)

〔**定理 3.6**〕　U^u の元 f が集合 A から B への関数のとき，$^*f$ は $^*A$ から $^*B$ への関数で，かつ，任意の $a\in A$ に対して，$^*f(^*a)={}^*(f(a))$ が成立する．また，U^u の元 P が集合 A 上の命題のとき，$^*P$ は $^*A$ 上の命題で，任意の $a\in A$ に対して，$P(a)$ と $^*P(^*a)$ は同値となる．

証明：移行の原理より明らか．　(証明終)

＊省略の原理：U^u の元 f が関数，演算，関係，および，命題のとき，$^*f$ の＊は原則として省略される．例えば，$^*\boldsymbol{R}$ の元 a, b に対する演算 $^*+$ は単に $a+b$ と記される．同様に，大小関係 $^*<$，絶対値 $^*|\ \ |$ などについても，単に $a<b$，$|a|$ と記される．

〔**定理 3.7**〕（**内集合原理**）　$P(x)$ はただ一つの自由変数 x をもつ U^i 上の論理式とする．また，A を U^i に属す集合とする．このとき，集合 $\{x\in A;\ P(x)\}$ は U^i に属す．

証明：論理式 $P(x)$ に表れる定数記号を $a_1, \cdots, a_n \in U^i$ とする．これらの定数記号を変数記号 $x_1, \cdots, x_n$ に置き換えた論理式を $P(x, x_1, \cdots, x_n)$ とする．これは，定数記号を含まないから U^u 上の論理式と考えることもできる．U^u 上で分出公理が成り立つから

$$\forall y \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists z [z=\{x\in y;\ P(x, x_1, \cdots, x_n)\}]$$

は U^u 上真の閉論理式である．移行の原理より，これの＊解釈も真となる．それゆえ，$y=A$，$x_1=a_1, \cdots, x_n=a_n$ のとき，U^i の元 b が存在し，$b=\{x\in A;\ P(x)\}$ となる．

集合，関数などが U^i に属すとき**内集合**，**内関数**などと呼び，そうでないとき**外集合**，**外関数**などと呼ぶ．また，それぞれ**内的**または**外的**と表現する．さらに，集合，関数などが U^s に属すとき，**標準的**と呼ぶ．また，U^u の元は**通常元**と呼ばれる．

〔**定理 3.8**〕　U^i の元からなる有限集合は内集合である．とくに，空集合は内集合である．また，A, B が内集合なら，$A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$ も内集合となる．U^i に含まれる有限集合から U^i の中への写像は内写像となる．故に，U^i の元からなる有限個の順序対は U^i の元となる．また，有限個の内集合の直積も内集合となる．

証明：$A=\{a_1, \cdots, a_n\}$，$a_m \in U^i$ $(m=1, 2, \cdots, n)$ とする．このとき，$x\in A$ は U^i 上の論理式

$$x=a_1 \vee \cdots \vee x=a_n$$

で特徴づけられる．故に，内集合原理より，A は内集合となる．残りの

証明も同様．（証明終）

〔**定理 3.9**〕　$A\in U^u$ が無限集合のとき，$\{{}^*a; a\in A\}$ は外集合となる．とくに，C の元からなる無限集合 $A\in U^u$ は外集合である．

証明：A の相異なる元に番号を付し，$a_1, a_2, \cdots$ とする．また，$A_n=\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ と定義する．このとき，移行の原理を用いると

$$\{{}^*a_n, {}^*a_{n+1}, \cdots\}={}^*A_n\cap\{{}^*a; a\in A\}$$

が示される．故に，$\{{}^*a;\ a\in A\}$ が内集合なら，定理3.8より，$\{{}^*a_n, {}^*a_{n+1}, \cdots\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ も内集合となる．ところが，この集合列は有限交差的であるが交差的でない．これは可算飽和性と矛盾する．故に，$\{{}^*a;\ a\in A\}$ は外集合である．（証明終）

〔**定理 3.10**〕　互いに共通部分をもたない可算無限個の空でない内集合の和集合，可算無限個の内集合の真の増大列の和集合，可算無限個の内集合の真の減少列の共通集合はいずれも外集合である．とくに，可算無限集合は外集合である．

証明：これらが内集合だとすると，可算飽和性と矛盾することが容易に示される．（証明終）

〔**定理 3.11**〕（写像拡張原理）　定義域と値域が一定の内集合 Σ および Ξ に含まれる可算個の内写像の拡張列に対して，これら共通の拡張となる Σ から Ξ の中への内写像が存在する．

証明：$f_n: \Sigma_n\to\Xi$ $(n=1, 2, \cdots)$ は内写像で，$f_1\prec f_2\prec\cdots$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty}\Sigma_n\subset\Sigma$ を満すものとする．ただし，$f\prec g$ は関数 g が f の拡張であることを意味する．ここで，

$$F_n=\{f: \Sigma\to\Xi \text{ 内写像};\ f_n\prec f\} \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

と定義する．内集合原理より F_n は内集合となる．また，$f_n': \Sigma\to\Xi$ を

$$f_n'(x)=\begin{cases} f_n(x) & (x\in\Sigma_n) \\ \xi & (x\in\Sigma\setminus\Sigma_n)\end{cases}$$

と定義する．ただし，ξ は Ξ の勝手な元．このとき，$f_n'\in F_n$ となるか

ら $F_n \neq \phi$. さらに，$F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ となるから，$F_n (n=1, 2, \cdots)$ は有限交差的である．故に，可算飽和性より交差的となる．$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ から勝手な元 f をとってくると，f は要求される性質をもつ．　　　　　（証明終）

U^u での概念 A が U^u 上の 1 変数論理式 $P(x)$ で定義されているとする．すなわち，

$$a \in U^u \text{ が } A \text{ である} \iff P(a)$$

ここで，$P(x)$ の $*$ 解釈を ${}^*P(x)$ とするとき，$a \in U^i$ が $*A$ であるとは，${}^*P(a)$ が成立することと定義する．$*A$ は，超 A，内 A，内的 A ともいわれる．また，誤解の余地のないときには，単に A と呼ばれることもある．例えば，実数に対しては**超実数**，有限集合に対しては**超有限集合**，集合に対しては内集合，確率空間に対しては**内的確率空間**となる．A についての性質は，移行の原理より，$*A$ にも遺伝する．もともと U にあった概念の U^u への制限の $*$ 解釈が U^i の元に対して定義されるが，これは，U の概念の U^i への制限として，もとからあった概念とは一般に異なる．例えば，有限性と超有限性．

以下，$\boldsymbol{N}=\{0, 1, 2, \cdots\}$，$\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ などは U^u の元で通常の意味をもつものとして使用する．また，上の四則・ベキ演算，絶対値，既知関数，順序，$\boldsymbol{Z}$ 上の整除関係などの解釈は，$*$ 省略の原則に従い，そのまま ${}^*\boldsymbol{R}$, ${}^*\boldsymbol{Z}$ 上のものとして用いられる．

$\#A$ は集合 A の元の個数（∞ も許す），$\mathcal{P}(A)$ は集合 A のベキ集合（すなわち，A の部分集合の全体）を表すものとする．$\#$ や $\mathcal{P}$ は，U に属す集合に対して定義されるがこれらの U^u への制限は，U^u に属すすべての集合を定義域とする限りは U^u の元とはならないが，定義域を適当に制限することにより U^u に属す写像と考えられる．これらの $*$ 解釈は U^i に属す写像となるが，もともと U で考えられていたものとは異なっている．このように $*$ 解釈されたものに対して，$\#^i$, $\mathcal{P}^i$ という記号を用いることとする．このとき，内集合 A に対して

$$\#^i A \in {}^*\boldsymbol{N} \cup \{\infty\}$$

$$\#^i A \in {}^*\boldsymbol{N} \iff A \text{ は超有限集合}$$
$$\#A < \infty \text{ のとき，} \#A = \#^i A$$
$$\mathcal{P}^i(A) = \mathcal{P}(A) \cap U^i$$
の成立することが，移行の原理より容易にわかる．

〔定理 3.12〕 超有限集合の内部分集合は超有限集合である．A, B を超有限集合とするとき，$A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $\mathcal{P}^i(A)$ は，再び，超有限集合となる．また，

$$\#^i \mathcal{P}^i(A) = 2^{\#^i A}$$

が成立する．

証明：移行の原理より明らか． (証明終)

〔定理 3.13〕 有限集合でない超有限集合が存在する．

証明：有限集合でない内集合 A を考える（例えば，$A = {}^*\boldsymbol{N}$）．このとき，

$$F_n = \{B \in \mathcal{P}^i(A);\ n \leqq \#^i B < \infty\} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定義する．明らかに，F_n は空でない内集合で，$F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ が成立する．故に，可算飽和性より $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$．$B \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ とすると，B は有限でない超有限集合となる． (証明終)

U^u に属す有限集合 A と，写像 $f: A \to \boldsymbol{C}$ に対して複素数を対応させる写像

$$\Sigma(f, A) = \sum_{a \in A} f(a)$$

の＊解釈を，＊省略の原則に従い，Σ と記す．このとき，超有限集合 A と，内写像 $f: A \to {}^*\boldsymbol{R}$ に対して，超実数 $\Sigma(f, A)$ が定まる．これを $\sum_{a \in A} f(a)$ と記し，**超有限和**と呼ぶ．

3.4 ${}^*\boldsymbol{N}$ と ${}^*\boldsymbol{R}$ の構造

〔定理 3.14〕 $n \in {}^*\boldsymbol{N}$ に対して，$n \leqq m$ となる $m \in \boldsymbol{N}$ が存在するとき，$n \in \boldsymbol{N}$ となる．

証明：U^u 上で真の閉論理式

$$(\forall x)[x\in \boldsymbol{N}\wedge x\leqq m \iff x=0\vee x=1\vee\cdots\vee x=m]$$

の＊解釈より

$$(\forall x)[x\in {}^*\boldsymbol{N}\wedge x\leqq m \iff x=0\vee x=1\vee\cdots\vee x=m]$$

を得る．これを $x=n$ に対して適用するとよい．　(証明終)

$a\in{}^*\boldsymbol{C}$ は，$|a|\leqq b$ となる正の $b\in\boldsymbol{R}$ が存在するとき，**有限**であると呼ばれる．有限でないとき，**無限**であると呼ばれる．以上の結果より，${}^*\boldsymbol{N}$ は，$\boldsymbol{N}$ に無限の元ばかりからなる ${}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N}$ が上積みされたものであることがわかる．

〔定理 3.15〕（帰納法の原理）　$f:\Sigma\to\Sigma$ を内写像とし，$a_0\in\Sigma$ とする．このとき，$a(0)=a_0$，かつ，すべての $n\in{}^*\boldsymbol{N}$ に対して，$a(n+1)=f(a(n))$ を満す内関数 $a:{}^*\boldsymbol{N}\to\Sigma$ が一意的に存在する．また，U^i 上の1変数論理式 $P(x)$ について，$P(0)$ が成立し，かつ，すべての $n\in{}^*\boldsymbol{N}$ に対して，$P(n)\Longrightarrow P(n+1)$ が成立するとき，すべての $n\in{}^*\boldsymbol{N}$ に対して，$P(n)$ が成立する．

証明：前半は，U^u での対応する主張から移行の原理で導ける．後半は，${}^*\boldsymbol{N}$ の内部分集合 $A=\{x\in{}^*\boldsymbol{N};\ P(x)\}$ に対する主張

$$[0\in A\wedge(\forall x)\{x\in{}^*\boldsymbol{N}\wedge x\in A\Longrightarrow x+1\in A\}]\Longrightarrow A={}^*\boldsymbol{N}$$

を示せばよいが，これは，U^u で真の閉論理式

$$(\forall y)[y\in\mathcal{P}(\boldsymbol{N})\Longrightarrow\{0\in y\wedge(\forall x)(x\in\boldsymbol{N}\wedge x\in y\Longrightarrow x+1\in y)$$
$$\Longrightarrow y=\boldsymbol{N}\}]$$

の＊解釈から導かれる．　(証明終)

〔定理 3.16〕（永続性の原理）　U^i 上の1変数論理式 $P(x)$ を考える．すべての $n\in\boldsymbol{N}$ が $P(n)$ を満すとき，$m\in{}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N}$ が存在して，$n\leqq m$ となるすべての $n\in{}^*\boldsymbol{N}$ に対して $P(n)$ が成立する．また，すべての $n\in{}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N}$ が $P(n)$ を満すとき，$m\in\boldsymbol{N}$ が存在して，$n\geqq m$ となるすべての $n\in{}^*\boldsymbol{N}$ に対して $P(n)$ が成立する．

証明：すべての $n\in\boldsymbol{N}$ が $P(n)$ を満すとする．このとき，内集合原理より

$$A=\left\{\begin{array}{l} x\in{}^*\boldsymbol{N};\ y\leqq x \text{ となるすべての } y\in{}^*\boldsymbol{N} \text{ に対して} \\ \qquad\qquad P(y) \text{ が成立する}\end{array}\right\}$$

とおくと，A は内集合となる．仮定より，$\boldsymbol{N}\subset A$ であるが $\boldsymbol{N}$ は外集合なので，$\boldsymbol{N}\subsetneqq A$ となり，$m\in A\backslash\boldsymbol{N}$ となる m が存在する．この m は上の要求を満す．後半の証明も同様．　(証明終)

$\xi\in{}^*\boldsymbol{C}$ が**無限小**であるとは，すべての正の $a\in\boldsymbol{R}$ に対して，$|\xi|<a$ が成立することをいう．$\xi,\eta\in{}^*\boldsymbol{C}$ に対して，$\xi-\eta$ が無限小のとき，$\xi\approx\eta$ と書く．以下，超実数について議論するが，超複素数についても同様の結果が成立する．

〔定理 3.17〕 無限小超実数の全体は外集合となる．故に，0 以外の無限小超実数が存在する．また，有限の超実数全体および無限の超実数全体は外集合となる．さらに，関係 $\approx$ は，$^*\boldsymbol{R}$ 上の外的な同値関係である．

証明：A を無限小超実数の全体とするとき，

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\in{}^*\boldsymbol{R};\ \ |x|<\frac{1}{n}\right\}$$

が成立する．A は可算無限個の内集合列で，真に減少列となるものの共通集合となっている．故に，定理 3.10 より，A は外集合となる．$0\in A$ かつ $\{0\}$ は内集合だから，$0\subsetneqq\{A\}$ となる．有限の超実数全体および無限の超実数全体についても同様．最後に，二つの無限小超実数の和は無限小となることより，関係 $\approx$ は遷移律を満し，同値関係となる．定理 3.17 より，0 の同値類が外集合だから，同値関係 $\approx$ は外的となる．

(証明終)

$a,b\in\boldsymbol{R}$ に対しては，$a\approx b$ と $a=b$ は同値となる．故に，$\xi\in{}^*\boldsymbol{R}$ に対して，$\xi\approx a$ となる $a\in R$ は，存在すれば一意的となる．この a を，ξ の**標準部分**といい，$^\circ\xi$ または $\mathrm{st}(a)$ と記す．ξ の標準部分が存在しないとき，ξ の正負に応じて，$^\circ\xi=\infty$ または $^\circ\xi=-\infty$ と記す．

〔定理 3.18〕 $\xi\in{}^*\boldsymbol{R}$ の標準部分が存在することと ξ が有限である

ことは同値となる．また，標準部分写像 st は外写像である．

証明：$\xi\in{}^*\boldsymbol{R}$ の標準部分が存在したとすると，$|\xi|\leqq|{}^\circ\xi|+1$ となるから，ξ は有限である．逆に，ξ が有限であるとする．このとき，$|\xi|<M$ となる $M\in\boldsymbol{N}$ が存在する．各 $n=1,2,\cdots$ に対して，定理 3.5 より

$$\xi\in{}^*[-M,M)=\bigcup_{i=-nM}^{nM-1}{}^*\left[\frac{i}{n},\quad\frac{i+1}{n}\right)$$

となる．故に，$\xi\in{}^*[i/n,(i+1)/n)$ となる i が存在する．$a_n=i/n$ とおくと，$|\xi-a_n|<1/n$ となる．このとき，任意の $n,m=1,2,\cdots$ に対して

$$|a_n-a_m|<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$$

となるから，$(a_n;\ n=1,2,\cdots)$ は $\boldsymbol{R}$ のコーシー列となり，$a=\lim_{n\to\infty}a_n\in\boldsymbol{R}$ が存在する．このとき，任意の n に対して，$|a-a_n|\leqq1/n$ となるから，$|\xi-a|\leqq2/n$ が成立する．これは，$\xi-a$ が無限小であることを意味し，$a={}^\circ\xi$ となる．写像 st が外写像であることは，$\mathrm{st}^{-1}\boldsymbol{R}$ が有限超実数の全体であり，外集合となることより明らか．（証明終）

〔**定理 3.19**〕　ξ,η は有限な超実数とする．このとき，

$${}^\circ(\xi\pm\eta)={}^\circ\xi\pm{}^\circ\eta \qquad \text{（符号同順）}$$

$${}^\circ(\xi\eta)={}^\circ\xi\,{}^\circ\eta$$

が成立する．さらに，${}^\circ\eta\neq0$ のとき

$${}^\circ\left(\frac{\xi}{\eta}\right)=\frac{{}^\circ\xi}{{}^\circ\eta}$$

となる．

証明：最後の主張だけ証明する．他も同様に示される．$0<\varepsilon<\frac{1}{2}\times|{}^\circ\eta|$ となる任意の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\frac{\xi}{\eta}-\frac{{}^\circ\xi}{{}^\circ\eta}\right|&=\left|\frac{\xi\,{}^\circ\eta-{}^\circ\xi\,\eta}{\eta\,{}^\circ\eta}\right|\\&=\left|\frac{(\xi-{}^\circ\xi)\,{}^\circ\eta-{}^\circ\xi\,(\eta-{}^\circ\eta)}{\eta\,{}^\circ\eta}\right|\\&\leqq\frac{|\xi-{}^\circ\xi|\,|{}^\circ\eta|+|{}^\circ\xi|\,|\eta-{}^\circ\eta|}{|\eta|\,|{}^\circ\eta|}\end{aligned}$$

$$\leqq \frac{\varepsilon|{}^\circ\eta|+\varepsilon|{}^\circ\xi|}{(|{}^\circ\eta|-\varepsilon)|{}^\circ\eta|}$$

$$\leqq \frac{2\varepsilon(|{}^\circ\eta|+|{}^\circ\xi|)}{|{}^\circ\eta|^2}$$

が成立するから

$$\frac{\xi}{\eta}-\frac{{}^\circ\xi}{{}^\circ\eta}\approx 0$$

となる．故に，${}^\circ(\xi/\eta)={}^\circ\xi/{}^\circ\eta$ が成立する． (証明終)

3.5 数列の収束

内的複素数列 $(a_n;\ n\in{}^*\boldsymbol{N})$（すなわち，$n\longmapsto a_n$ が ${}^*\boldsymbol{N}$ から ${}^*\boldsymbol{C}$ への内写像となるもの）と $m\in{}^*\boldsymbol{N}$ に対して，超有限和 $\sum_{n=0}^{m} a_n=\sum_{n\in\{0,\cdots,m\}} a_n$ が定まるが，これは，$(a_n;\ n\in{}^*\boldsymbol{N})$ と m の関数として内関数となる．以下，内的実数列について論じるが同様の結果が内的複素数列についても成立する．

〔定理 3.20〕 $(a_n;\ n\in{}^*\boldsymbol{N})$ が標準超実数列（すなわち，U^s の元となるもの）で $\sum_{n\in\boldsymbol{N}} a_n$ が収束するものとする．このとき，任意の $m\in{}^*\boldsymbol{N}\setminus\boldsymbol{N}$ に対して

$${}^\circ\left(\sum_{n=0}^{m} a_n\right)=\sum_{n\in\boldsymbol{N}} a_n$$

が成立する．また，$(a_n;\ n\in{}^*\boldsymbol{N})$ は内的実数列で $\sum_{n\in\boldsymbol{N}} {}^\circ a_n$ が収束するものとする．このとき，$M\in{}^*\boldsymbol{N}\setminus\boldsymbol{N}$ が存在して，$m\leqq M$ となる任意の $m\in{}^*\boldsymbol{N}\setminus\boldsymbol{N}$ に対して

$${}^\circ\left(\sum_{n=0}^{m} a_n\right)=\sum_{n\in\boldsymbol{N}} {}^\circ a_n$$

が成立する．

証明：$(a_n;\ n\in{}^*\boldsymbol{N})$ が標準実数列のとき，$(a_n;\ n\in{}^*\boldsymbol{N})={}^*(b_n;\ n\in\boldsymbol{N})$ となる実数列 $(b_n;\ n\in\boldsymbol{N})$ が存在するが，$n\in\boldsymbol{N}$ に対しては，$a_n=b_n$ となるから，$(a_n;\ n\in{}^*\boldsymbol{N})={}^*(a_n;\ n\in\boldsymbol{N})$ となる．$\sum_{n\in\boldsymbol{N}} a_n$ が収束するから，この和を $A\in\boldsymbol{R}$ とするとき，任意の正の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$ に対して，$M\in$

Nが存在して，U^u上の閉論理式

$$(\forall x)\left[x\in N\wedge x\geqq M \Longrightarrow \left|\sum_{n=0}^{x} a_n - A\right| < \varepsilon\right]$$

が成立する．この＊解釈を考えると

$$(\forall x)\left[x\in {}^*N\wedge x\geqq M \Longrightarrow \left|\sum_{n=0}^{x} a_n - A\right| < \varepsilon\right]$$

となる．任意の $m\in {}^*N\backslash N$ は，$m\geqq M$ を満すから，これより

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n - A\right| < \varepsilon$$

が成立する．ε は任意だったから，

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \approx A$$

となり，前半の主張が証明された．次に，(a_n; $n\in {}^*N$) は内的実数列で

$$A=\sum_{n\in N} {}^\circ a_n \in R$$

が存在するものとする．このとき，任意の $m\in N$ に対して，

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \approx \sum_{n=0}^{m} {}^\circ a_n$$

となるから，任意の $k=1,2,\cdots$ に対して，$L\in N$ が存在して，$m\geqq L$ となる任意の $m\in N$ に対して

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n - A\right| < \frac{1}{k}$$

が成立する．このとき，U^i 上の1変数論理式 $P(x)$ を

$$x\in {}^*N\wedge x\geqq L \Longrightarrow \left|\sum_{n=0}^{x} a_n - A\right| < \frac{1}{k}$$

と定義すると，すべての $m\in N$ に対して $P(m)$ は成立する．故に，永続性の原理より，$M\in {}^*N\backslash N$ が存在して，$m\leqq M$ となるすべての $m\in {}^*N$ に対して $P(m)$ は成立する．このような $M\in {}^*N\backslash N$ の一つを M_k と書く．可算個の内集合の列

$$\{n\in {}^*N;\ k\leqq n\leqq M_k\} \qquad (k=1,2,\cdots)$$

は有限交差的であるから，可算飽和性より，交差的となる．これらの共

通集合に属す元の一つを M とすると，$M\in{}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N}$ で，かつ，$m\leqq M$ となるすべての $m\in{}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N}$ が，この共通集合に属すことになるから

$$\left|\sum_{n=0}^{m}a_n-A\right|<\frac{1}{k}$$

が $k=1,2,\cdots$ に対して成立する．故に，

$$\sum_{n=0}^{m}a_n\approx A$$

となる． (証明終)

3.6 関数の連続性と微分

〔**定理 3.21**〕 関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が点 $a\in\boldsymbol{R}$ で連続であるための必要十分条件は，その＊解釈 $f:{}^*\boldsymbol{R}\to{}^*\boldsymbol{R}$ が，$°\xi=a$ を満す任意の $\xi\in{}^*\boldsymbol{R}$ に対して，$°f(\xi)=f(a)$ を満すことである．f が連続関数であるための必要十分条件は，任意の有限超実数 ξ に対して，$°f(\xi)=f(°\xi)$ が成立することである．また，f が一様連続関数であるための必要十分条件は，$\xi\approx\eta$ となる任意の超実数 ξ,η に対して，$f(\xi)\approx f(\eta)$ が成立することである．

証明：$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が点 $a\in\boldsymbol{R}$ で連続であるとする．このとき，任意の正数 $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$ に対して，正数 $\delta\in\boldsymbol{R}$ が存在して，

$$(\forall x)[x\in\boldsymbol{R}\wedge|x-a|<\delta\implies|f(x)-f(a)|<\varepsilon]$$

が成立する．この＊解釈を考えると，$°\xi=a$ となる任意の $\xi\in{}^*\boldsymbol{R}$ に対して，$|\xi-a|<\delta$ が満されるから，$|f(\xi)-f(a)|<\varepsilon$ が成立する．ここで，ε は任意だったから，$f(\xi)\approx f(a)$ となる．逆に，$°f(\xi)=f(a)$ が，$°\xi=a$ を満すすべての $\xi\in{}^*\boldsymbol{R}$ に対して成立したとする．任意の正の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$ をとる．U^i 上の1変数論理式 $P(x)$ を

$$x\in{}^*\boldsymbol{N}\Longrightarrow(\forall y)\left[y\in{}^*\boldsymbol{R}\wedge|y-a|<\frac{1}{x+1}\Longrightarrow|f(y)-f(a)|<\varepsilon\right]$$

と定義するとき，すべての $n\in{}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N}$ に対して $P(n)$ が成立する．故に，永続性の原理より，ある $m\in\boldsymbol{N}$ に対して $P(m)$ が成立する．$\delta=$

$1/(m+1)$ と定義するとき，$|x-a|<\delta$ を満す任意の $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立することになるから，f は点 a で連続となる．

2番目の主張は，この結果を，すべての $a\in\boldsymbol{R}$ に対して適用すればよい．

関数 f が一様連続だとする．このとき，任意の正の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$ に対して，正数 $\delta\in\boldsymbol{R}$ が存在して，

$$(\forall x)(\forall y)[x\in\boldsymbol{R}\wedge y\in\boldsymbol{R}\wedge|x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon]$$

が成立する．この＊解釈を考えると，$\xi\approx\eta$ となる任意の $\xi,\eta\in{}^*\boldsymbol{R}$ に対して，$|f(\xi)-f(\eta)|<\varepsilon$ が成立する．正数 ε は任意だったから，$f(\xi)\approx f(\eta)$ となる．逆に，$\xi\approx\eta$ となる任意の $\xi,\eta\in{}^*\boldsymbol{R}$ に対して，$f(\xi)\approx f(\eta)$ が成立したとする．任意の正の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$ をとる．U^i 上の1変数論理式 $P(x)$ を

$$x\in{}^*\boldsymbol{N}\Longrightarrow(\forall y)(\forall z)\Big[y\in{}^*\boldsymbol{R}\wedge z\in{}^*\boldsymbol{R}\wedge|y-z|<\frac{1}{x+1}$$
$$\Longrightarrow|f(y)-f(z)|<\varepsilon\Big]$$

と定義し，前と同様の議論をすればよい．　(証明終)

〔**定理 3.22**〕　関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が点 $a\in\boldsymbol{R}$ で微分可能で $f'(a)=A$ となるための必要十分条件は，$0\neq\xi\approx0$ となる任意の $\xi\in{}^*\boldsymbol{R}$ に対して

$$^\circ\left(\frac{f(a+\xi)-f(a)}{\xi}\right)=A$$

が成立することである．

証明：$f'(a)=A$ が成立するとする．このとき，任意の正の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$ に対して，正数 $\delta\in\boldsymbol{R}$ が存在して

$$(\forall x)\left[x\in\boldsymbol{R}\wedge0<|x|<\delta\Longrightarrow\left|\frac{f(a+x)-f(a)}{x}-A\right|<\varepsilon\right]$$

が成立する．これの＊解釈と ε が任意であることを用いればよい．逆に，$0\neq\xi\approx0$ となる任意の $\xi\in{}^*\boldsymbol{R}$ に対して

$$^\circ\left(\frac{f(a+\xi)-f(a)}{\xi}\right)=A$$

が成立したとする．任意の正の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$ をとる．このとき，U^i 上の1変数

論理式

$$x\in{}^*N\Longrightarrow(\forall y)\Big[y\in{}^*R\wedge 0<|y|<\frac{1}{x+1}$$
$$\Longrightarrow\Big|\frac{f(a+y)-f(a)}{y}-A\Big|<\varepsilon\Big]$$

に対して，定理 3.21 と同様の議論をすればよい． (証明終)

以上の結果は，実数上の複素数値関数についても成立する．一般に，${}^*\boldsymbol{R}$ の内部分集合 A 上の内関数 $f: A\to{}^*\boldsymbol{C}$ が **S 有限**であるとは，${}^\circ a\in\boldsymbol{R}$ を満す任意の $a\in A$ に対して，${}^\circ|f(a)|<\infty$ が成立することをいう．また，f が **S 連続**であるとは，${}^\circ a={}^\circ b\in\boldsymbol{R}$ を満す任意の $a,b\in A$ に対して $f(a)\approx f(b)$ が成立することをいう．$f: A\to{}^*\boldsymbol{C}$ が S 有限かつ S 連続のとき，

$$B:=\{{}^\circ a;\ a\in A\ \text{かつ}\ a\ \text{は有限}\}$$

とし，関数 ${}^\circ f: B\to\boldsymbol{C}$ を

$${}^\circ f(b)={}^\circ(f(a))\qquad(b={}^\circ a\in B)$$

と定義する．${}^\circ f$ を f の**標準部分**と呼ぶ．上の定義は well defined である．定理 3.21 の証明と同様に以下の結果が示される．

〔定理 3.23〕 内関数 $f: A\to{}^*\boldsymbol{C}$ が標準部分 ${}^\circ f: B\to\boldsymbol{C}$ をもつとき，${}^\circ f$ は連続関数となる．

3.7 ローブ測度の導入

確率空間の概念の U^u への制限の＊解釈を，**内的確率空間**と呼ぶ．$(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ を内的確率空間とする．このとき，$\mathcal{A}$ は内的 σ 集合体である．

〔定理 3.24〕 内的 σ 集合体 $\mathcal{A}$ は集合体であるが，$\mathcal{A}$ が有限集合でないとき，σ 集合体ではない．また，互いに共通部をもたない可算無限個の空でない $\mathcal{A}$ の元の和集合は，$\mathcal{A}$ に属さない．

証明：$\mathcal{A}$ が集合体であることは，移行の原理から導かれる．例えば，$A,B\in\mathcal{A}$ のとき $A\cup B\in\mathcal{A}$ となることは，x が σ 集合体であることを定義する U^u 上の 1 変数論理式を $P(x)$ とすれば，U^u 上で真の閉論理

式

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[P(x)\wedge y\in x\wedge z\in x \Longrightarrow y\cup z\in x]$$

の＊解釈

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[{}^*P(x)\wedge y\in x\wedge z\in x \Longrightarrow y\cup z\in x]$$

を $x=\mathcal{A}$, $y=A$, $z=B$ に対して適用すればよい．ただし，${}^*P(x)$ は $P(x)$ の＊解釈で ${}^*P(\mathcal{A})$ が成立している．$\mathcal{A}$ が無限集合のとき，互いに共通部分をもたない可算無限個の $\mathcal{A}$ の元が存在する．この和集合は，定理 3.10 より，外集合となり $\mathcal{A}$ の元ではない．故に，$\mathcal{A}$ は σ 集合体ではない．（証明終）

〔定理 3.25〕 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ を内的確率空間とする．このとき，μ は超有限加法性をもつ．すなわち，超有限個の $\mathcal{A}$ の元の内列 $(A_n; n=1, \cdots, m)$ ($m\in{}^*\boldsymbol{N}$ で写像 $n\longmapsto A_n$ が $\{1, \cdots, m\}$ から $\mathcal{A}$ への内写像となる）で，互いに共通部分をもたないものに対して，$\bigcup_{n=1}^{m} A_n\in\mathcal{A}$ かつ

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right)=\sum_{n=1}^{m}\mu(A_n)$$

が成立する（右辺は超有限和）．とくに，μ は有限加法的である．

証明： 測度の有限加法性から，移行の原理を用いて導かれる．

（証明終）

〔定理 3.26〕 内的確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ に対して，$(\Omega, \mathcal{A}, {}^\circ\mu)$ は有限加法的測度空間となり，${}^\circ\mu$ は完全加法性をもつ．ただし，$A\in\mathcal{A}$ に対して，${}^\circ\mu(A)={}^\circ(\mu(A))$ と定義される．

証明： 定理 3.25 より，μ は超有限加法性をもつから，有限加法的となる．故に，定理 3.19 より，$(\Omega, \mathcal{A}, {}^\circ\mu)$ は有限加法的確率空間となる．また，定理 3.24 より，互いに共通部分をもたない $A_n\in\mathcal{A}$ $(n=1, 2, \cdots)$ が，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathcal{A}$ を満すとき，ある m が存在して，

$$A_{m+1}=A_{m+2}=\cdots=\phi$$

となる．故に，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

となり，μ は完全加法的である． (証明終)

定理 3.26 および定理 2.2 より，内的確率空間 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ に対して，$°\mu$ は $\sigma\mathcal{A}$ に拡張され $(\Omega,\sigma\mathcal{A},°\mu)$ は確率空間となる．これの完備化を $(\Omega,L(\mathcal{A}),L(\mu))$ と書き，**ローブ確率空間**と呼び，$L(\mu)$ を**ローブ測度**と呼ぶ．Ω が超有限集合，$\mathcal{A}=\mathcal{P}^i(\Omega)$ となるような内的確率空間 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ を**超有限確率空間**と呼ぶ．超有限確率空間 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ においては，任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して

$$\mu(A)=\sum_{\omega\in A}\mu(\omega)$$

が成立する．

3.8 ローブ測度の性質

本節では，$(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ は内的確率空間とし，これに対応するローブ空間を $(\Omega,L(\mathcal{A}),L(\mu))$ とする．また，$P=L(\mu)$ とおく．

〔定理 3.27〕 任意の $B\in L(\mathcal{A})$ と正の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$ に対して，$A,C\in\mathcal{A}$ が存在して，$A\subset B\subset C$ かつ $\mu(C)-\mu(A)<\varepsilon$ が成立する．故に，

$$P(C\backslash B)\leqq\varepsilon$$
$$P(B\backslash A)\leqq\varepsilon$$

となる．

証明：

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{matrix}B\in L(\mathcal{A});\ \text{任意の正の}\ \varepsilon\in\boldsymbol{R}\ \text{に対して}\ A\subset B\subset C\ \ \text{かつ}\\ \mu(C)-\mu(A)<\varepsilon\ \text{を満す}\ A,C\in\mathcal{A}\ \text{が存在する}\end{matrix}\right\}$$

とおく．明らかに，$\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ となる．$\mathcal{B}$ が σ 集合体であることを証明する．$\phi\in\mathcal{B}$ は明らか．また，$B\in\mathcal{B}$ のとき，$\Omega\backslash B\in\mathcal{B}$ となることも容易に示せる．次に，$B_1,B_2\in\mathcal{B}$ のとき，任意の正の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$A_1\subset B_1\subset C_1,\qquad \mu(C_1\backslash A_1)<\varepsilon$$
$$A_2\subset B_2\subset C_2,\qquad \mu(C_2\backslash A_2)<\varepsilon$$

となる $A_1, A_2, C_1, C_2 \in \mathcal{A}$ が存在する．

このとき，明らかに，

$$A_1 \cup A_2 \subset B_1 \cup B_2 \subset C_1 \cup C_2$$

$$\mu((C_1 \cup C_2) \setminus (A_1 \cup A_2))$$
$$\leqq \mu(C_1 \setminus A_1) + \mu(C_2 \setminus A_2) < 2\varepsilon$$

$$A_1 \cup A_2,\ B_1 \cup B_2 \in \mathcal{A}$$

となり，ε は任意だから，$B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$ となる．故に，$\mathcal{B}$ は集合体となるが，σ 集合体となることをいうためには，$\mathcal{B}$ の元の可算個の増大列の和が $\mathcal{B}$ に属すことをいえばよい．

$B_n \in \mathcal{B}$ $(n=1, 2, \cdots)$ を増大列とし，$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ とおく．任意の正の $\varepsilon \in \boldsymbol{R}$ をとる．このとき，$A_n', C_n' \in \mathcal{A}$ が存在して，$A_n' \subset B_n \subset C_n'$ かつ $\mu(C_n') - \mu(A_n') < 2^{-n}\varepsilon$ $(n=1, 2, \cdots)$ となる．$A_n = \bigcup_{m=1}^{n} A_m'$，$C_n = \bigcup_{m=1}^{n} C_m'$ とおくと，

$$A_n \subset B_n \subset C_n$$
$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$$
$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots$$

かつ

$$\mu(C_n) - \mu(A_n) = \mu(C_n \setminus A_n)$$
$$\leqq \sum_{m=1}^{n} \mu(C_m' \setminus A_m')$$
$$< \sum_{m=1}^{n} 2^{-m}\varepsilon < \varepsilon \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

が成立する．

$$P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

だから，n_0 が存在して，任意の $n \geqq n_0$ に対して，$P(B) < P(B_n) + \varepsilon$ が成立する．故に，

$$P(B \setminus A_{n_0}) \leqq P(B_{n_0} \setminus A_{n_0}) + \varepsilon$$
$$\leqq P(C_{n_0} \setminus A_{n_0}) + \varepsilon$$
$$= {}^{\circ}\mu(C_{n_0} \setminus A_{n_0}) + \varepsilon \leqq 2\varepsilon$$

が成立する．任意の $n \geqq n_0$ に対して，$A_{n_0} \subset A_n \subset B$ だから

$$P(A_n \backslash A_{n_0}) \leqq P(B \backslash A_{n_0}) \leqq 2\varepsilon$$

が成立する．故に，$\mu(A_n \backslash A_{n_0}) < 3\varepsilon$ となる．これより，

$$\begin{aligned}\mu(C_n \backslash A_{n_0}) &= \mu(C_n \backslash A_n) + \mu(A_n \backslash A_{n_0}) \\ &< 4\varepsilon\end{aligned}$$

が成立する．写像拡張原理より，$N_0 = N \backslash \{0\}$ から $\mathcal{A}$ の中への写像 $n \longmapsto C_n$ の拡張となる内写像 $\varphi : {}^*N \to \mathcal{A}$ が存在する．$n \in {}^*N_0$ に対する $\varphi(n)$ も C_n と書く．このとき，U^i 上の 1 変数論理式 $Q(x)$ を

$$x \in {}^*N_0 \Longrightarrow [C_x \subset C_{x+1} \wedge (x \geqq n_0 \Longrightarrow \mu(C_x \backslash A_{n_0}) < 4\varepsilon)]$$

と定義するとき，すべての $n \in N_0$ に対して $Q(n)$ が成立する．故に，永続性の原理（定理 3.16）より，$m \in {}^*N \backslash N$ が存在して，$n \leqq m$ となるすべての $n \in {}^*N_0$ に対して $Q(n)$ が成立する．$A = A_{n_0}$，$C = C_m$ とおけば，すべての $n \in N_0$ に対して $B_n \subset C_n \subset C_m$ となるから，$B \subset C_m$ となる．故に，$A, C \in \mathcal{A}$，$A \subset B \subset C$ かつ $\mu(C \backslash A) < 4\varepsilon$ が成立する．ε は任意だったから，これは，$B \in \mathcal{B}$ を意味する．

以上より，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ を含む σ 集合体だから，$\sigma\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ となる．$B \in L(\mathcal{A})$ のとき，$A' \subset B \subset C'$ かつ $P(C' \backslash A') = 0$ となる $A', C' \in \sigma\mathcal{A}$ が存在する．$A', C' \in \mathcal{B}$ だから，任意の正の $\varepsilon \in R$ に対して，$A, C \in \mathcal{A}$ が存在して，$A \subset A' \subset B \subset C' \subset C$ かつ

$$P(A' \backslash A) < \varepsilon$$
$$P(C \backslash C') < \varepsilon$$

となる．このとき，

$$\begin{aligned}P(C \backslash A) &= P(C \backslash C') + P(C' \backslash A') + P(A'/A) \\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

となるから，

$$\mu(C \backslash A) < 2\varepsilon$$

となる．ε は任意だから，$B \in \mathcal{B}$ を得る．故に，$\mathcal{B} = L(\mathcal{A})$ となり証明が完了する．（証明終）

〔**定理 3.28**〕　任意の $B \in L(\mathcal{A})$ に対して，$P(A \triangle B)=0$ となる $A \in \mathcal{A}$ が存在する．ただし，

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

証明：$B \in L(\mathcal{A})$ とする．定理 3.27 より，$n=1, 2, \cdots$ に対して，$A_n \subset B \subset C_n$ かつ $\mu(C_n \backslash A_n) < 1/n$ となる A_n，$C_n \in \mathcal{A}$ が存在する．このとき，任意の $n, m \in \boldsymbol{N}_0$ に対して，

$$\begin{aligned} P(A_n \triangle A_m) &\leqq P(B \backslash A_n) + P(B \backslash A_m) \\ &\leqq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \end{aligned}$$

となるから，

$$\mu(A_n \triangle A_m) < \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$$

が成立する．写像拡張の原理より，写像 $n \longmapsto A_n$ は ${}^*\boldsymbol{N}_0$ から $\mathcal{A}$ への内写像に拡張される．U^i 上の 1 変数論理式 $Q(x)$ を

$$x \in {}^*\boldsymbol{N}_0 \Longrightarrow (\forall y)\left[y \in {}^*\boldsymbol{N}_0 \wedge y \leqq x \Longrightarrow \mu(A_x \triangle A_y) < \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right]$$

と定義する．すべての $n \in \boldsymbol{N}_0$ に対して，$Q(n)$ が成立するから，永続性の原理より，$P(m)$ が成立するような $m \in {}^*\boldsymbol{N} \backslash \boldsymbol{N}$ が存在する．$A = A_m \in \mathcal{A}$ とおくと，任意の $n \in \boldsymbol{N}_0$ に対して

$$P(A \triangle A_n) = {}^\circ\mu(A_m \triangle A_n) \leqq \frac{2}{n}$$

だから，

$$\begin{aligned} P(A \triangle B) &\leqq P(A \triangle A_n) + P(A_n \triangle B) \\ &\leqq \frac{2}{n} + \frac{1}{n} = \frac{3}{n} \end{aligned}$$

が成立する．故に，$P(A \triangle B)=0$ となる．　(証明終)

〔**定理 3.29**〕　関数 $f: \Omega \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ が P 可測であるための必要十分条件は，$\mathcal{A}$ 可測な内関数 $F: \Omega \to {}^*\boldsymbol{R}$ が存在して，$f(\omega) = {}^\circ F(\omega)$ が P に関してほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して成立することである．このとき，F は f の**持ち上げ**であるという．

証明：$F:\Omega\to{}^*\boldsymbol{R}$ を $\mathcal{A}$ 可測な内関数とする．このとき，任意の $a\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$\{\omega\in\Omega;\ {}^\circ F(\omega)\leqq a\}$$
$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\omega\in\Omega;\ F(\omega)<a+\frac{1}{n}\right\}\in\sigma\mathcal{A}$$

が成立するから，関数 ${}^\circ F:\Omega\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ は $\sigma\mathcal{A}$ 可測である．故に $f(\omega)={}^\circ F(\omega)$ P-$a.a.\,\omega$ が成立する f は P 可測となる．逆に，P 可測関数 $f:\Omega\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ が与えられたとする．f の持ち上げは，$f=f_+-f_-$ として，f_+ の持ち上げ F_+ および f_- の持ち上げ F_- から，F_+-F_- として構成されるから，結局，非負値関数 f に対して，持ち上げの存在を示せばよい．$f:\Omega\to[0,\infty]$ とする．各 $L=1,2,\cdots$ に対して，

$$B_n{}^L=\{\omega;\ n2^{-L}\leqq f(\omega)<(n+1)2^{-L}\}\in\mathcal{B}\qquad(n=0,1,\cdots,4^L-1)$$
$$B^L{}_{4^L}=\{\omega;\ f(\omega)\geqq 2^L\}\in\mathcal{B}$$

と定義する．定理 3.28 より，$P(A_n{}^L\triangle B_n{}^L)=0$ となる．$A_n{}^L\in\mathcal{A}$ $(n=0,1,\cdots,4^L)$ が存在する．さらに，すべての $L=1,2,\cdots$ に対して

$$\left.\begin{aligned}&\Omega=\bigcup_{n=0}^{4^L}A_n{}^L\\&A_n{}^L\cap A_m{}^L=\phi\qquad(0\leqq n<m\leqq 4^L)\\&A_n{}^L=A_{2n}{}^{L+1}\cup A_{2n+1}{}^{L+1}\qquad(0\leqq n<4^L)\end{aligned}\right\}\qquad(\sharp)$$

が成立するようにできる．このとき，写像拡張原理と永続性の原理より $m\in{}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N}$ が存在して，内的な集合列 $(A_n{}^L;\ 0\leqq n\leqq 4^L,\ 1\leqq L\leqq m)$ で $(\sharp)$ を満すものがとれる．

このとき，

$$F(\omega)=\sum_{n=0}^{4^m}n2^{-m}1_{A_n{}^m}(\omega)$$

と定義すれば，写像 $F:\Omega\to{}^*[0,\infty)$ は内写像となる．なぜなら，写像 F は集合 $\{(\omega,\ F(\omega));\ \omega\in\Omega\}$ と同一視され，かつ，この集合は U^i 上の論理式 $P(x)$：

$$(\exists y)(\exists z)(\exists n)[x=(y,z)\wedge y\in\Omega\wedge z\in{}^*\boldsymbol{R}\wedge n\in{}^*\boldsymbol{N}$$
$$\wedge 0\leqq n\leqq 4^m\wedge y\in A_n{}^m\wedge z=n2^{-m}]$$

を用いて，$\{x\in\Omega\times{}^*\boldsymbol{R};\ P(x)\}$ と定義されるからである．さらに，P-$a.a.\ \omega\in\Omega$ に対して，$f(\omega)={}^\circ F(\omega)$ となっていることも容易にわかる．故に，F は f の持ち上げである． （証明終）

3.9 積分の表現

前節と同様，$(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ を内的確率空間とし，これに対応するローブ空間を $(\Omega,\ L(\mathcal{A}),\ L(\mu))$ とする．また，$P=L(\mu)$ とおく．$\mathcal{A}$ 可測な内関数 $F:\Omega\to{}^*\boldsymbol{R}$ が μ に関して **S 可積分**，または，**$S\mu$ 可積分**であるとは

（1） ${}^\circ\int|F|d\mu<\infty$ かつ

（2） $\mu(A)\approx 0$ となる任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して

$$\int_A Fd\mu\approx 0$$

が成立することをいう．

〔**定理 3.30**〕 $f:\Omega\to\boldsymbol{R}$ が P 可積分であるための必要十分条件は，f が $S\mu$ 可積分な持ち上げ F をもつことである．このとき

$$\int fdP={}^\circ\int Fd\mu$$

が成立する．

証明：（必要性） f の持ち上げの一つを F' とする．f が可積分だから，$n=0,1,2,\cdots$ に対して，正の $a_n\in\boldsymbol{R}$ が存在して

$$(n+1)P(n\leqq|f|<n+1)<a_n \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

かつ

$$\sum_{n\in\boldsymbol{N}}a_n<\infty$$

が成立する．関数 $a:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{R}$ の $*$ 解釈を同じ $a:{}^*\boldsymbol{N}\to{}^*\boldsymbol{R}$ で表す．このとき，数列 $(a_n;\ n\in{}^*\boldsymbol{N})$ は標準実数列となり，定理 3.20 より，任意の $m\in{}^*\boldsymbol{N}\setminus\boldsymbol{N}$ に対して

$${}^\circ\left(\sum_{n=0}^{m}a_n\right)=\sum_{n\in\boldsymbol{N}}a_n<\infty$$

となる．F' は f の持ち上げだから，任意の $n\in N$ に対して

$$P(\{n\leqq|F'|<n+1\}\setminus\{n\leqq|f|<n+2\})=0$$

となる．また，

$$\begin{aligned}{}^{\circ}\!\int_{n\leqq|F'|<n+1}|F'|\,d\mu &\leqq {}^{\circ}((n+1)\mu(n\leqq|F'|<n+1))\\ &=(n+1)P(n\leqq|F'|<n+1)\\ &\leqq(n+1)P(n\leqq|f|<n+2)\\ &<a_n+a_{n+1}\end{aligned}$$

が成立する．すなわち

$$\int_{n\leqq|F'|<n+1}|F'|\,d\mu<a_n+a_{n+1}$$

がすべての $n\in N$ に対して成立するから，永続性の原理より，これが $0\leqq n<m$ を満す任意の $n\in{}^*N$ に対して成立するような $m\in{}^*N\setminus N$ が存在する．

$$F(\omega)=\begin{cases}F'(w) & (|F(\omega)|<m\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

と定義するとき，F は明らかに f の持ち上げとなる．F が $S\mu$ 可積分となることを示す．

$$\begin{aligned}{}^{\circ}\!\int|F|\,d\mu &= {}^{\circ}\left(\sum_{n=0}^{m-1}\int_{n\leqq|F'|<n+1}|F'|\,d\mu\right)\\ &\leqq {}^{\circ}\left(\sum_{n=0}^{m-1}(a_n+a_{n+1})\right)\\ &\leqq {}^{\circ}\left(2\sum_{n=0}^{m}a_n\right)=2\sum_{n\in N}a_n<\infty\end{aligned}$$

また，$\mu(A)\approx 0$ となる任意の $A\in\mathcal{A}$ と任意の $n\in N$ に対して

$$\begin{aligned}{}^{\circ}\!\int_A|F|\,d\mu &= {}^{\circ}\!\int_{A\cap\{|F|<n\}}|F|\,d\mu+{}^{\circ}\!\int_{A\cap\{|F|\geqq n\}}|F|\,d\mu\\ &\leqq {}^{\circ}\!\int_{\{|F|\geqq n\}}|F|\,d\mu\leqq {}^{\circ}\left(\sum_{k=n}^{m-1}(a_n+a_{n+1})\right)\\ &=2\sum_{k=n}^{\infty}a_n\end{aligned}$$

が成立し，$n\to\infty$ とすることにより

$$°\int_A |F|\,d\mu=0$$

を得る．故に，F は $S\mu$ 可積分である．

（十分性） F が $f:\Omega\to\boldsymbol{R}$ の SP 可積分な持ち上げとする．このとき，

$$\begin{aligned}\int |f|\,dP &\leqq \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P(n\leqq|f|<n+1)\\ &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} °\int_{n-1\leqq|F|<n+1}(|F|+2)\,d\mu\\ &\leqq \lim_{n\to\infty} 2\,°\int_{0\leqq|F|<n}(|F|+2)\,d\mu\\ &\leqq 2\,°\int |F|\,d\mu+4\\ &<\infty\end{aligned}$$

となり，f が可積分となる．また，このとき

$$P(f\in\{n\varepsilon;\ n\in\boldsymbol{Z}\})=0$$

を満す任意の正の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$ をとると，

$$f(\omega)\notin\{n\varepsilon;\ n\in\boldsymbol{Z}\}\quad \text{かつ}\quad f(\omega)={}°F(\omega)$$

のとき，任意の $k\in\boldsymbol{Z}$ に対して

$$f(\omega)\in[k\varepsilon,(k+1)\varepsilon)\iff F(\omega)\in{}^*[k\varepsilon,(k+1)\varepsilon)$$

が成立する．故に，これが P-$a.a.\,\omega$ に対して成立する．また，F が $S\mu$ 可積分だから，任意の $m\in{}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N}$ に対して，$\mu(|F|\geqq m)\approx 0$ となり

$$\int_{|F|\geqq m}|F|\,d\mu\approx 0$$

が成立する．故に，

$$\int_{|F|\geqq m}|F|\,d\mu<\varepsilon$$

が任意の $m\in{}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N}$ に対して成立するので，永続性の原理より，これが成立するような $m_1\in\boldsymbol{N}$ が存在する．また，f が P 可積分だから

$$\int_{|f|\geqq m_2}|f|\,dP<\varepsilon$$

が成立するような $m_2 \in \boldsymbol{N}$ もとれる．$n\varepsilon$ が m_1 および m_2 より大きくなるような $n \in \boldsymbol{N}$ をとるとき

$$
\begin{aligned}
&\left|\int f dP - {}^\circ\!\int F d\mu\right| \\
&\leqq 2\varepsilon + \left|\int_{-n\varepsilon \leqq f < n\varepsilon} f dP - {}^\circ\!\int_{-n\varepsilon \leqq F < n\varepsilon} F d\mu\right| \\
&\leqq 2\varepsilon + \left|\int_{-n\varepsilon \leqq f < n\varepsilon} f dP - \sum_{k=-n}^{n-1} k\varepsilon P(k\varepsilon \leqq f < (k+1)\varepsilon)\right| \\
&\quad + \left|\sum_{k=-n}^{n} k\varepsilon P(k\varepsilon \leqq f < (k+1)\varepsilon) - \sum_{k=-n}^{n} k\varepsilon P(k\varepsilon \leqq F < (k+1)\varepsilon)\right| \\
&\quad + {}^\circ\left|\sum_{k=-n}^{n} k\varepsilon \mu(k\varepsilon \leqq F < (k+1)\varepsilon) - \int_{-n\varepsilon \leqq F < n\varepsilon} F d\mu\right| \\
&\leqq 4\varepsilon
\end{aligned}
$$

が成立する．上の条件を満すような正の $\varepsilon \in \boldsymbol{R}$ は稠密だから，$\varepsilon \downarrow 0$ とすることにより

$$\int f dP = {}^\circ\!\int F d\mu$$

が成する．　(証明終)

上の証明から以下の結果も明らかとなる．

〔定理 3.31〕　$f : \Omega \to [0, \infty]$ が P 可測な関数で F をその持ち上げとする．このとき

$$\int f dP \leqq {}^\circ\!\int F d\mu$$

が成立する．

これまで，確率測度を論じてきたが，以上では，σ 有限な測度による積分の超準表現を考える．とくに，$\boldsymbol{R}^n$ 上のルベーク測度を考察する．話を簡単にするため，$\boldsymbol{R}$ 上のルベーク測度を論じるが，$\boldsymbol{R}^n$ への拡張は容易である．

$\boldsymbol{R}$ 上のルベーク測度を dx とし，$\mathscr{B}$ をルベーク可測集合の全体とする．ルベーク測度空間 $(\boldsymbol{R}, \mathscr{B}, dx)$ の＊解釈 $({}^*\boldsymbol{R}, {}^*\mathscr{B}, {}^*dx)$ を考える．内

関数 $f: {}^*\boldsymbol{R} \to {}^*\boldsymbol{C}$ が ${}^*dx$ に関して S 可積分であるとは

（1） $\displaystyle {}^\circ\!\int |f|{}^*dx < \infty$,

（2） $\displaystyle \int_A {}^*dx \approx 0$ となる任意の $A \in {}^*\mathscr{B}$ に対して，$\displaystyle \int_A |f|{}^*dx \approx 0$ かつ

（3） $A \in {}^*\mathscr{B}$ が無限の元ばかりからなるとき，$\displaystyle \int_A |f|{}^*dx \approx 0$

が成立することをいう．

〔**定理 3.32**〕 内関数 $f: {}^*\boldsymbol{R} \to {}^*\boldsymbol{C}$ が S 有限かつ S 連続とする．さらに，f が ${}^*dx$ に関して S 可積分のとき，標準部分 ${}^\circ f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ はルベーク可積分となり

$$\int {}^\circ f dx = {}^\circ\!\int f {}^*dx$$

が成立する．

証明：一般性を失なわず $f \geqq 0$ と仮定してよい．定理 3.23 より，${}^\circ f$ は連続関数である．任意の正数 $\varepsilon \in \boldsymbol{R}$ に対して，f の S 可積分性と永続性の原理より，正の実数 M_0 が存在して，

$$\int_{{}^*(-\infty, -M_0] \cup {}^*[M_0, \infty)} f {}^*dx < \varepsilon$$

が成立する．${}^\circ f$ の $*$ 解釈を F と書くとき，移行の原理より，$M \geqq M_0$ を満す任意の $M \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\int_{(-M, M)} {}^\circ f dx = \int_{{}^*(-M, M)} F {}^*dx$$

が成立する．また，任意の $t \in {}^*(-M, M)$ に対して，${}^\circ(f(t)) = ({}^\circ f)({}^\circ t) = {}^\circ F(t)$ となるから，$f(t) \approx F(t)$ が成立する．故に，

$$|f(t) - F(t)| \leqq \frac{\varepsilon}{M}$$

となり

$$\left| \int_{{}^*(-M, M)} F {}^*dx - \int_{{}^*(-M, M)} f {}^*dx \right| < \varepsilon$$

を得る．以上より

$$\left|\int_{(-M,M)}{}^{\circ}f dx - \int f^* dx\right| < 2\varepsilon$$

が成立する．ここで，$M\to\infty$，$\varepsilon\downarrow 0$ とすれば

$$\int {}^{\circ}f dx = {}^{\circ}\int f^* dx$$

を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

3.10　*特性関数の標準部分

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ は内的確率空間とし，$(\Omega,\ L(\mathcal{A}),\ P)$ は対応するローブ確率空間とする．ただし，$P=L(\mu)$．

〔定理 3.33〕　$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 上の ${}^*\boldsymbol{R}$ 値*確率変数 X の*特性関数を φ_X とする．このとき，$X(\omega)$ が P-$a.\,a.\,\omega\in\Omega$ に対して有限となるための必要十分条件は，φ_X が S 連続となることである．このとき，$\varphi_{{}^{\circ}X}$ は φ_X の標準部分となる．

証明：${}^{\circ}X(\omega)\in\boldsymbol{R}$ が P-$a.\,a.\,\omega$ に対して成立したとする．t を有限超実数とするとき，内関数 $\omega\longmapsto e^{itX(\omega)}$ は $\omega\longmapsto e^{i^{\circ}t^{\circ}X(\omega)}$ の持ち上げでかつ $S\mu$ 可積分だから，定理 3.30 より

$$\varphi_{{}^{\circ}X}({}^{\circ}t)=\int e^{i^{\circ}t^{\circ}X(\omega)}dP(\omega)={}^{\circ}\int e^{itX(\omega)}d\mu(\omega)={}^{\circ}\varphi_X(t)$$

が成立する．故に，$\varphi_{{}^{\circ}X}$ は φ_X の標準部分となり，φ_X は S 連続となる．

逆に，φ_X が S 連続だとする．任意の $t\in{}^*\boldsymbol{R}$ に対して，$|\varphi_X(t)|\leqq 1$ だから，連続関数 $\varphi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$ が存在して，$\varphi({}^{\circ}t)={}^{\circ}\varphi_X(t)$ がすべての有限な $t\in{}^*\boldsymbol{R}$ に対して成立する．関数 $\xi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を

$$\xi(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

と定義し，また，$m\in\boldsymbol{N}_0$ をとる．定理 2.19 において，$f(x)=\xi(x/m)$ とおいた式の*解釈を考えると，

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\xi\left(\frac{y}{m}\right)e^{-iyt-\frac{t^2}{2v}}\varphi_X(t)^*dt^*dy-\int\xi\left(\frac{X(\omega)}{m}\right)d\mu(\omega)\ \right|$$
$$<\varepsilon+4e^{-\frac{\varepsilon^2 v}{2}}$$

が任意の超実数 $\varepsilon>0$ および $v>0$ に対して成立する．ε および v を正の実数とするとき，関数

$$\xi\left(\frac{y}{m}\right)e^{-iyt-\frac{t^2}{2v}}\varphi_X(t)$$

は $*dt*dy$ に関して S 可積分で，それ自身が標準部分だから，定理 3.32 より

$$\frac{1}{2\pi}{}^{\circ}\iint\xi\left(\frac{y}{m}\right)e^{iyt-\frac{t^2}{2v}}\varphi_X(t)*dt*dy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\iint\xi\left(\frac{y}{m}\right)e^{iyt-\frac{t^2}{2v}}\varphi(t)\,dtdy$$

が成立する．同様に

$${}^{\circ}\int\xi\left(\frac{X(\omega)}{m}\right)d\mu(\omega)=\int\xi\left(\frac{{}^{\circ}X(\omega)}{m}\right)dP(\omega)\quad(\text{ただし，}\xi(\pm\infty)=0)$$

が成立するから，

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\xi\left(\frac{y}{m}\right)e^{iyt-\frac{t^2}{2v}}\varphi(t)\,dtdy-\int\xi\left(\frac{{}^{\circ}X(\omega)}{m}\right)dP(\omega)\right|$$
$$\leqq\varepsilon+4e^{-\frac{\varepsilon^2v}{2}}$$

となる．ここで，$m\to\infty$ のとき，

$$\frac{1}{2\pi}\iint\xi\left(\frac{y}{m}\right)e^{iyt-\frac{t^2}{2v}}\varphi(t)\,dtdy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\left(\int\xi\left(\frac{y}{m}\right)e^{iyt}dy\right)e^{-\frac{t^2}{2v}}\varphi(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\frac{2(1-\cos mt)}{mt^2}e^{-\frac{t^2}{2v}}\varphi(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\frac{2(1-\cos t)}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2m^2v}}\varphi\left(\frac{t}{m}\right)dt$$
$$\longrightarrow\frac{1}{2\pi}\int\frac{2(1-\cos t)}{t^2}\varphi(0)\,dt=1$$

となり，また，

$$\int\xi\left(\frac{{}^{\circ}X(\omega)}{m}\right)dP(\omega)\longrightarrow P({}^{\circ}X\in\boldsymbol{R})$$

となる．故に，

$$|P({}^{\circ}X\in\boldsymbol{R})-1|\leqq\varepsilon+4e^{-\frac{\varepsilon^2v}{2}}$$

が成立するが，ε および v は任意の正の実数だから，$P(°X\in \boldsymbol{R})=1$ が成立する．（証明終）

3.11 独立確率変数の和

前節と同様のローブ確率空間を考える．$M\in {}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N}$ とし，$(X_n;n=1,\cdots,M)$ は $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 上の ${}^*\boldsymbol{R}$ 値＊独立同一分布に従う＊確率変数列とする．すなわち，任意の $\mathcal{A}$ の元の内的な列 $(A_n;n=1,\cdots,M)$ に対して

$$\mu(X_n\in A_n\ \forall n=1,\cdots,M)=\prod_{n=1}^{M}\mu(X_n\in A_n)$$

が成立するものとする．このとき，

$$°\left(\sum_{n=1}^{M}X_n(\omega)\right)$$

は $(\Omega,\ L(\mathcal{A}),\ P)$ 上の $\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ 値確率変数となる．

一般に，Λ の元をパラメーターとする二つの実数値確率変数列 $(Y_\lambda;\lambda\in\Lambda)$ と $(Z_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)$（必ずしも同じ確率空間上で定義されてなくてもよい）が同じ**有限次元分布**をもつとは，Λ の任意の有限集合 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ と $\boldsymbol{R}$ のボレル集合の列 $B_1,\cdots,B_n$ に対して，

$$P(Y_{\lambda_i}\in B_i(i=1,\cdots,n))=P(Z_{\lambda_i}\in B_i(i=1,\cdots,n))$$

が成立することをいう．このとき，

$$(Y_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)\overset{\mathcal{L}}{\sim}(Z_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)$$

と記す．この記法は，＊確率変数列に対しても適用し，この＊解釈を意味するものとする．また，${}^*\boldsymbol{R}$ の元 $a\neq 0$ に対して，b/a が有限または無限小となる ${}^*\boldsymbol{R}$ の元 b を一般に，それぞれ，$O(a)$ または $o(a)$ と記す．内的確率測度 μ に関する＊期待値は $E_\mu(\quad)$，確率測度 P に関する期待値は $E_P(\quad)$，と記す．また，$X=X_1$ とおく．

〔**定理 3.34**〕

$$P\left(°\sum_{n=1}^{M}X_n\in\boldsymbol{R}\right)=1$$

が成立するための必要十分条件は，t の関数 $M(1-\varphi_X(t))$ が S 連続か

つ S 有限となることである．また，このとき

$$\varphi_{\circ\sum_{n=1}^{M} X_n}({}^\circ t) = {}^\circ(\varphi_X(t)^M) = {}^\circ e^{M(\varphi_X(t)-1)}$$

が任意の有限な t に対して成立する．

証明：(十分性)　$M(\varphi_X(t)-1)$ が S 連続かつ S 有限とする．このとき，有限な t に対して，$\varphi_X(t)-1\approx 0$ だから

$$\begin{aligned}\varphi_{\sum_{n=1}^{M} X_n}(t) &= \varphi_X(t)^M \\ &= (1+\varphi_X(t)-1)^M \\ &\approx e^{M(\varphi_X(t)-1)}\end{aligned}$$

となり，$\varphi_{\sum_{n=1}^{M} X_n}$ は S 連続となる．故に，定理 3.33 より

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M} X_n \in \boldsymbol{R}\right)=1$$

が成立する．

(必要性)

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M} X_n \in \boldsymbol{R}\right)=1$$

が成り立つと仮定する．定理 3.33 より

$$\begin{aligned}\varphi({}^\circ t) &:= \varphi_{\circ\sum_{n=1}^{M} X_n}({}^\circ t) \\ &= {}^\circ\varphi_{\sum_{n=1}^{M} X_n}(t) = {}^\circ(\varphi_X(t)^M) \in \boldsymbol{C}\end{aligned}$$

がすべての有限な $t\in{}^*\boldsymbol{R}$ に対して成立する．φ は $\boldsymbol{R}$ 上の連続関数で，$\varphi(0)=1$ となる．$\varphi(t)=0$ となる実数 t の絶対値の下限を T とする ($T=\infty$ を含めて)．明らかに，$T>0$ である．${}^\circ t\in(-T,\ T)$ となる勝手な t に対して，$\varphi_X(t)\approx 1$ となることを示す．

内関数 φ_X は $*$ 連続で，かつ，${}^*[0, t]$ で 0 にならないから，$\log\varphi_X$ も ${}^*[0, t]$ で $*$ 連続となる．ここで，$\varphi_X(t)\not\approx 1$ だとすれば，

$$a=\min\left\{|u-v|;\ u, v\in{}^*[0, t],\ \ |\log\varphi_X(u)-\log\varphi_X(v)|=\frac{1}{M}\right\}$$

とおくとき，中間値の定理を用いると，$|u-v|<a$ となる任意の $u, v\in {}^*[0, t]$ に対して

$$|\log \varphi_X(u)-\log \varphi_X(v)|<\frac{1}{M}$$

となる．故に，a が無限小でないとすれば，$\log \varphi_X(t)\approx\log \varphi_X(0)=0$ となり，$\varphi_X(t)\not\approx 1$ という仮定に反す．これより，a は無限小となり，$u\approx v$ となる $u, v\in {}^*[0, t]$ で

$$|\log \varphi_X(u)-\log \varphi_X(v)|=\frac{1}{M}$$

となるものがとれる．このとき，

$$\xi=M(\log \varphi_X(v)-\log \varphi_X(u))$$

とおくとき

$$\varphi_X(u)^M-\varphi_X(v)^M=\varphi_X(u)^M(1-e^{\xi})$$

が成立し，かつ，上式より $|\xi|=1$ だから，$1-e^{\xi}\not\approx 0$ となる．また，仮定より

$$°(\varphi_X(u)^M)=\varphi(°u)\neq 0$$

だから $\varphi_X(u)^M\not\approx 0$ となり，結局

$$\varphi_X(u)^M-\varphi_X(v)^M\not\approx 0$$

となり，$\varphi_X{}^M=\varphi_{\sum_{n=1}^{M}X_n}$ の S 連続性に反す．以上より，$°t\in(-T, T)$ を満す任意の t に対して，$\varphi_X(t)\approx 1$ が結論される．

さらに，$°t\in(-T,\ T)$ を満す任意の t に対して，$\varphi_X(t)^M$ は有限でかつ無限小でないから，

$$\begin{aligned}\varphi_X(t)^M&=e^{M\log\varphi_X(t)}\\&=e^{M(\varphi_X(t)-1)(1+o(\varphi_X(t)-1))}\\&\approx e^{M(\varphi_X(t)-1)}\end{aligned}$$

が成立し，$M(\varphi_X(t)-1)$ は $°t\in(-T,\ T)$ を満す t の上で S 連続かつ S 有限となる．故に，必要性の証明のためには，$T=\infty$ となることを示せばよい．

$T<\infty$ と仮定する．このとき，$\varphi(T)=0$ となる．$(\tilde{X}_n;\ n=1, \cdots, M)$

を $(X_n;\ n=1,\cdots,M)$ と＊独立な＊確率変数列で

$$(\tilde{X}_n) \overset{\mathcal{L}}{\approx} (-X_n)$$

が成立するものとする．ここで

$$Y_n = X_n + \tilde{X}_n \qquad (n=1,\cdots,M)$$

とおくとき，仮定より

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M} Y_n \in \boldsymbol{R}\right)=1$$

が成立している．また，$Y=Y_1$，$\phi=\varphi_{{}^\circ\sum_{n=1}^{M} Y_n}$ とおくとき

$$\varphi_Y(t)=|\varphi_X(t)|^2 \qquad (\forall t\in {}^*\boldsymbol{R})$$

$$\phi(t)=|\varphi(t)|^2 \qquad (\forall t\in \boldsymbol{R})$$

が成り立つ．故に，$\phi(T)=0$，かつ，前段の議論を $(Y_n;\ n=1,\cdots,M)$ に対して適用すると，$M(1-\varphi_Y(T/2))$ は有限となる．

他方

$$\begin{aligned}
0 &\leqq 1-\varphi_Y(T)\\
&= \int (1-\cos TY(\omega))\,d\mu(\omega)\\
&\leqq 4\int \left(1-\cos \frac{T}{2}Y(\omega)\right)d\mu(\omega)\\
&= 4\left(1-\varphi_Y\left(\frac{T}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

だから，$M(1-\varphi_Y(T))$ も有限となる．これは

$$\begin{aligned}
0=\phi(T) &= {}^\circ(\varphi_Y(T)^M)\\
&= {}^\circ(e^{M(\varphi_Y(T)-1)})\\
&= e^{{}^\circ(M(\varphi_Y(T)-1))}>0
\end{aligned}$$

となり矛盾する．以上より，$T=\infty$ となり証明が完了する． (証明終)

〔**定理 3.35**〕

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M} X_n \in \boldsymbol{R}\right)=1$$

が成立するための必要十分条件は，以下の 4 条件が満されることである．

（1） 任意の正の無限超実数 L に対して

$$M\mu(|X|\geqq L)\approx 0$$

（2） $M\mu(|X|\geqq 1)$ が有限

（3） $M\int X1_{|X|<1}d\mu$ が有限

（4） $M\int X^2 1_{|X|<1}d\mu$ が有限

証明：(十分性) （1）〜（4）が満されているとする．（1）と永続性の原理より，任意の正の実数 ε に対して，実数 l が存在して，$M\mu(|X|\geqq l)<\varepsilon$ が成立する．このとき

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{M}X_n\neq\sum_{n=1}^{M}X_n^{(l)}\right)\leqq M\mu(|X|\geqq l)$$
$$<\varepsilon$$

となる．ただし，$X_n^{(l)}=X_n 1_{|X_n|<l}$ とおいた．他方

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M}X_n\notin \boldsymbol{R}\right)$$
$$\leqq P\left(\sum_{n=1}^{M}X_n\neq\sum_{n=1}^{M}X_n^{(l)}\right)+P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M}X_n^{(l)}\notin \boldsymbol{R}\right)$$
$$<\varepsilon+P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M}X_n^{(l)}\notin \boldsymbol{R}\right)$$

が成立するから，$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M}X_n\in \boldsymbol{R}\right)=1$ をいうためには，任意の正の実数 l に対して

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M}X_n^{(l)}\notin \boldsymbol{R}\right)=0$$

をいえばよい．

ところが，$(X_n^{(l)};\ n=1,\cdots,M)$ が＊独立同一分布することを用いて

$$\int\left(\sum_{n=1}^{M}X_n^{(l)}\right)^2 d\mu=(M^2-M)\left(\int X^{(l)}d\mu\right)^2+M\int (X^{(l)})^2 d\mu$$
$$\leqq(M^2-M)\left(\left|\int X^{(1)}d\mu\right|+l\mu(|X|\geqq 1)\right)^2$$
$$+M\left(\int (X^{(1)})^2 d\mu+l^2\mu(|X|\geqq 1)\right)$$

$$\leqq \left(\left| M\int X\cdot 1_{|X|<1} d\mu \right| + Ml\mu(|X|\geqq 1) \right)^2$$

$$+ M\int X^2 1_{|X|<1} d\mu + Ml^2\mu(|X|\geqq 1)$$

となるから，(2)～(4) より

$$\int \left(\sum_{n=1}^{M} X_n^{(l)} \right)^2 d\mu =: a$$

は有限となる．

チェビシェフの不等式より，任意の正の実数 t に対して

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M} X_n^{(l)} \notin \boldsymbol{R} \right) \leqq {}^\circ\mu\left(\left| \sum_{n=1}^{M} X_n^{(l)} \right| \geqq t \right)$$

$$\leqq {}^\circ\left(\frac{a}{t^2} \right)$$

が成立するから，$t\to\infty$ として

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M} X_n^{(l)} \in \boldsymbol{R} \right) = 1$$

を得る．

（必要性）

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M} X_n \in \boldsymbol{R} \right) = 1$$

が成立するものとする．定理 3.34 の必要性の証明と同様に

$$Y_n = X_n + \tilde{X}_n \qquad (n=1, \cdots, M)$$

を考える．Y_n は原点に関して対称に分布し，また，

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M} Y_n \in \boldsymbol{R} \right) = 1$$

が成立する．(Y_n) が条件 (1)～(4) を満すことを証明する．

条件 (1) が成立しないとすると，正の無限超実数 L が存在して，$Y = Y_1$ とおくとき

$$M\mu(|Y|\geqq L) \gtrapprox 0$$

となるから

$$\Omega_0 := \{\omega\in\Omega;\ \max_{1\leqq n\leqq M} |Y_n(\omega)| \geqq L\}$$

に対して

$$\mu(\Omega_0)=1-(1-\mu(|Y|\geqq L))^M$$
$$\geqq 1-e^{-M\mu(|Y|\geqq L)}\gtrapprox 0$$

が成立する．$\omega\in\Omega_0$ に対して

$$n(\omega)=\min\{n;\quad |Y_n(\omega)|\geqq L\}$$

と定義し，$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 上の＊確率変数列（Y_n'; $n=1, \cdots, M$）を

$$Y_n'(\omega)=\begin{cases} -Y_n(\omega) & (\omega\in\Omega_0 \text{ かつ } n=n(\omega)) \\ Y_n(\omega) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定義するとき，

$$(Y_n')\overset{\mathcal{L}}{\approx}(Y_n)$$

が成立する，また，$\omega\in\Omega_0$ のとき，

$$\left|\sum_{n=1}^{M}Y_n(\omega)-\sum_{n=1}^{M}Y_n'(\omega)\right|\geqq 2L$$

が成立するので

$$\left|\sum_{n=1}^{M}Y_n(\omega)\right|\geqq L$$

または

$$\left|\sum_{n=1}^{M}Y_n'(\omega)\right|\geqq L$$

となる．故に，

$$\begin{aligned}
&2\mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M}Y_n\right|\geqq L\right)\\
&=\mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M}Y_n\right|\geqq L\right)+\mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M}Y_n'\right|\geqq L\right)\\
&\geqq\mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M}Y_n\right|\geqq L \quad \text{または} \quad \left|\sum_{n=1}^{M}Y_n'\right|\geqq L\right)\\
&\geqq\mu(\Omega_0)\gtrapprox 0
\end{aligned}$$

となる．これより

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M}Y_n\notin \boldsymbol{R}\right)\geqq P\left(\left|\sum_{n=1}^{M}Y_n\right|\geqq L\right)$$

$$= {}^\circ\mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M} Y_n\right| \geqq L\right) > 0$$

が導かれ

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M} Y_n \in \boldsymbol{R}\right) = 1$$

に反す．故に，（1）が成立する．

条件（2）が成立しないとする．このとき，（1）および永続性の原理より，実数 $c>1$ が存在して

$$M\mu(|Y| \geqq c) \leqq 1$$

となるから，$M\mu(1 \leqq |Y| < c)$ は正の無限超実数となる．

$$a := \frac{\int Y \cdot 1_{1 \leqq Y < c}\, d\mu}{\mu(1 \leqq Y < c)}$$

$$b := \frac{\int (Y-a)^2 1_{1 \leqq Y < c}\, d\mu}{\mu(1 \leqq Y < c)}$$

$$p := \mu(1 \leqq Y < c)$$

とおくとき，a, b は有限で，かつ，$b \leqq c^2$ が成立する．また，$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 上の＊確率変数 ξ と η を

$$\xi(\omega) = \{n;\ 1 \leqq Y_n(\omega) < c\}$$

$$\eta(\omega) = \{n;\ -c < Y_n(\omega) \leqq -1\}$$

と定義する．＊確率変数列 $(Y_n';\ n=1, \cdots, M)$ を

$$Y_n'(\omega) = \begin{cases} -Y_n(\omega) & (n \in \xi(\omega) \cup \eta(\omega)) \\ Y_n(\omega) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定義する．このとき，$(Y_n') \mathcal{L} (Y_n)$ が成立する．α と β を $\alpha \cap \beta = \phi$ となる $\{1, \cdots, M\}$ の部分集合とするとき，チェビシェフの不等式より

$$\mu\left(|\sum_{n \in \alpha} Y_n - \#^i\alpha \cdot a| \geqq 2\sqrt{\#^i\alpha \cdot b}\ \middle|\ \xi = \alpha, \eta = \beta\right) \leqq \frac{1}{4}$$

$$\mu\left(|\sum_{n \in \beta} Y_n' - \#^i\beta \cdot a| \geqq 2\sqrt{\#^i\beta \cdot b}\ \middle|\ \xi = \alpha, \eta = \beta\right) \leqq \frac{1}{4}$$

が成立する．ただし，$\mu(\cdot|\cdot)$ は＊条件付確率を表す．故に，$\alpha \cap \beta = \phi$,

かつ $\#^i\alpha+\#^i\beta \leqq 3\,Mp$ となる任意の $\alpha, \beta \subset \{1, \cdots, M\}$ に対して,

$$2\sqrt{\#^i\alpha\cdot b}+2\sqrt{\#^i\beta\cdot b}\leqq 6c\sqrt{Mp}$$

だから

$$\mu\left(|\sum_{n\in\alpha} Y_n-\sum_{n\in\beta} Y_n'|\geqq|\#^i\alpha-\#^i\beta|\cdot a-6c\sqrt{Mp}\ \Big|\ \xi=\alpha, \eta=\beta\right)$$
$$\geqq 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

が成立する.

仮定より $0<p\leqq 1/2$ かつ Mp は無限超実数となる. 故に, チェビシェフの不等式より

$$\mu(Mp\leqq\#^i\xi+\#^i\eta\leqq 3Mp)$$
$$\geqq 1-\frac{M2p(1-2p)}{M^2p^2}\geqq 1-\frac{2}{Mp}\approx 1$$

となる. スターリングの公式を用いて, 無限の超自然数 k と

$$z:=\frac{2r-k}{\sqrt{k}}$$

が有限となる超自然数 r に対して

$$\mu(\#^i\xi=r\,|\,\#^i\xi+\#^i\eta=k)$$
$$=\binom{k}{r}2^{-k}=\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}e^{-\frac{z^2}{2}}(1+o(1))$$
$$\geqq\frac{1}{\sqrt{7k}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

を得る. 故に, 正の有限超実数 d に対して

$$\mu(|\#^i\xi-\#^i\eta|\geqq d\sqrt{Mp})$$
$$\geqq\sum_{k\geqq Mp}\ \sum_{\frac{2r-k}{\sqrt{k}}\geqq d}\mu(\#^i\xi\geqq r\,|\,\#^i\xi+\#^i\eta=k)\,\mu(\#^i\xi+\#^i\eta=k)$$
$$\geqq\sum_{k\geqq Mp}\frac{1}{3}\int_d^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}dz\cdot\mu(\#^i\xi+\#^i\eta=k)$$
$$\geqq\frac{1}{6}\int_d^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

が成り立つ.

以上を合せると

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M} Y_n - \sum_{n=1}^{M} Y_n{}'\right| \geqq 2\sqrt{Mp}\right) \\
&\geqq \sum_{\substack{|\#^i\alpha - \#^i\beta|\cdot a \geqq (6c+2)\sqrt{Mp} \\ \#^i\alpha + \#^i\beta \leqq 3Mp}} \mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M} Y_n - \sum_{n=1}^{M} Y_n{}'\right| \geqq 2\sqrt{Mp} \mid \xi=\alpha,\ \eta=\beta\right) \\
&\quad \times \mu(\xi=\alpha,\ \eta=\beta) \\
&\geqq \sum_{\substack{|\#^i\alpha - \#^i\beta|\cdot a \geqq (6c+2)\sqrt{Mp} \\ \#^i\alpha + \#^i\beta \leqq 3Mp}} \mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M} Y_n - \sum_{n=1}^{M} Y_n{}'\right| \geqq |\#^i\alpha - \#^i\beta|\cdot a - 6c\sqrt{Mp} \mid \xi \right. \\
&\quad \left. =\alpha,\ \eta=\beta\right) \mu(\xi=\alpha,\ \eta=\beta) \\
&\geqq \sum_{\substack{|\#^i\alpha - \#^i\beta|\cdot a \geqq (6c+2)\sqrt{Mp} \\ \#^i\alpha + \#^i\beta \leqq 3Mp}} \frac{1}{2}\mu(\xi=\alpha,\ \eta=\beta) \\
&\geqq \frac{1}{3}\mu\left(|\#^i\xi - \#^i\eta| \geqq \frac{6c+2}{a}\sqrt{Mp}\right) \\
&\geqq \frac{1}{18}\int_{\frac{6c+2}{a}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \gtrapprox 0
\end{aligned}
$$

が成立する．これより

$$
\begin{aligned}
&2\mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M} Y_n\right| \geqq \sqrt{Mp}\right) \\
&\quad \geqq \mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M} Y_n\right| \geqq \sqrt{Mp} \quad \text{または} \quad \left|\sum_{n=1}^{M} Y_n{}'\right| \geqq \sqrt{Mp}\right) \\
&\quad \geqq \mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M} Y_n - \sum_{n=1}^{M} Y_n{}'\right| \geqq 2\sqrt{Mp}\right) \gtrapprox 0
\end{aligned}
$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
&P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M} Y_n \notin \boldsymbol{R}\right) \\
&\quad \geqq P\left(\left|\sum_{n=1}^{M} Y_n\right| \geqq \sqrt{Mp}\right) \\
&\quad = {}^\circ\mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M} Y_n\right| \geqq \sqrt{Mp}\right) > 0
\end{aligned}
$$

となり，仮定に反す．故に，（2）が成立する．

Y は原点に関して対称に分布するから

$$
M\int Y 1_{|Y|<1} d\mu = 0
$$

となり，（3）が満される．

条件（4）を証明する．まず，正の実数 c が存在して，任意の正の無限小実数 β に対して

$$M\int Y^2 1_{|Y|<\beta}d\mu \leqq c$$

が成立することを示す．もし，これを否定すると，任意の $n\in \boldsymbol{N}_0$ に対して，正の無限小実数 β_n が存在して

$$M\int Y^2 1_{|Y|<\beta_n}d\mu \geqq n$$

が成立する．このとき，有限な t に対して

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= \int \cos(tY)1_{|Y|<\beta_n}d\mu + \int \cos(tY)1_{|Y|\geqq\beta_n}d\mu \\ &\leqq \int \cos(tY)1_{|Y|<\beta_n}d\mu + \mu(|Y|\geqq\beta_n) \\ &\leqq \int\left(1-\frac{t^2Y^2}{3}\right)1_{|Y|<\beta_n}d\mu + \mu(|Y|\geqq\beta_n) \\ &= 1-\frac{t^2}{3}\int Y^2 1_{|Y|<\beta_n}d\mu\end{aligned}$$

が成立する．よって，

$$\begin{aligned}M(1-\varphi_Y(1)) &\geqq \frac{1}{3}M\int Y^2 1_{|Y|>\beta_n}d\mu \\ &\geqq \frac{n}{3}\end{aligned}$$

が任意の n に対して成立するが，これは定理 3.34 より，$M(1-\varphi_Y(1))$ が有限であることに反す．故に，正の実数 c が存在して

$$M\int Y^2 1_{|Y|<\beta}d\mu \leqq c$$

が任意の正の無限小超実数 β に対して成立する．永続性の原理より，

$$M\int Y^2 1_{|Y|<\varepsilon}d\mu \leqq c$$

が成立するような正の実数 ε が存在する．条件（2）を Y/ε に対して適用することにより $M\mu(|Y|\geqq\varepsilon)$ は有限となる．故に，

$$M\int Y^2 1_{|Y|<1}d\mu$$

$$=M\int Y^2 1_{|Y|<\varepsilon}d\mu+M\int Y^2 1_{\varepsilon\leqq Y<1}d\mu$$
$$\leqq c+M\mu(Y\geqq\varepsilon)$$

が成立し，$M\int Y^2 1_{|Y|<1}d\mu$ は有限となる．

最後に，(X_n) に対して（1）～（4）を証明する．（1）を否定すると，一般性を失なわず，$M\mu(X\geqq 3K)\not\approx 0$ となる正の無限超実数 K が存在すると仮定できる．このとき，$\mu(|Y|\geqq K)=o(M^{-1})$ だから

$$\mu(|Y|\geqq K)\geqq\mu(X\geqq 3K \text{ かつ } \tilde{X}\geqq -2K)$$
$$=\mu(X\geqq 3K)\mu(\tilde{X}\geqq -2K)$$
$$=\mu(X\geqq 3K)\mu(X\leqq 2K)$$

となり，$\mu(X\leqq 2K)=o(1)$ が結論される．これは，$\mu(X\geqq 2K)\approx 0$ を意味し，また，

$$\mu(|Y|\geqq K)\geqq\mu(X\geqq 2K)\mu(X\leqq K)$$

だから，$\mu(X\leqq K)=o(M^{-1})$ を得る．これは

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{M}X_n\geqq MK\right)\geqq\mu(X_n\geqq K\ \ (\forall n=1,\cdots,M))=\mu(X\geqq K)^M\approx 1$$

を意味し，仮定

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M}X_n\in\boldsymbol{R}\right)=1$$

に反す．故に，（1）が成立する．

次に，（2）を否定すると，一般性を失なわず，$M\mu(X\geqq 1)$ が無限となることを仮定できる．Y に関する（2）と（4）より，$\mu(|Y|\geqq 1/4)=O(M^{-1})$ だから

$$\mu\left(|Y|\geqq\frac{1}{4}\right)\geqq\mu\left(X\geqq 1 \text{ かつ } \tilde{X}\geqq -\frac{3}{4}\right)$$
$$=\mu(X\geqq 1)\mu\left(\tilde{X}\geqq -\frac{3}{4}\right)$$
$$=\mu(X\geqq 1)\mu\left(X\leqq\frac{3}{4}\right)$$

となり，$\mu\left(X\leqq\frac{3}{4}\right)=o(1)$ を得る．これは $\mu\left(X\geqq\frac{3}{4}\right)\approx 0$ を意味し，また，

$$\mu\left(|Y|\geqq\frac{1}{4}\right)\geqq\mu\left(X\geqq\frac{3}{4}\right)\mu\left(X\leqq\frac{1}{2}\right)$$

だから，$\mu\left(X\leqq\frac{1}{2}\right)=O(M^{-1})$ が結論される．これは，

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{M}X_n\geqq\frac{M}{2}\right)\geqq\mu\left(X_n\geqq\frac{1}{2}\ \ (\forall n=1,\cdots,M)\right)=\mu\left(X\geqq\frac{1}{2}\right)^M\approx 0$$

を意味し，仮定

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M}X_n\in\boldsymbol{R}\right)=1$$

に反す．故に，（2）が成立する．

（3）を証明しよう．

$$\begin{aligned}&\int Y^2 1_{|Y|<2}d\mu\\ &\geqq\int(X+\tilde{X})^2 1_{|X|<1}1_{|\tilde{X}|<1}d\mu\\ &=2\int X^2 1_{|X|<1}d\mu\cdot\mu(|X|<1)-2\left(\int X1_{|X|<1}d\mu\right)^2\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}&M\int\left(X1_{|X|<1}-\int X1_{|X|<1}d\mu\right)^2 d\mu\\ &=M\int X^2 1_{|X|<1}d\mu-M\left(\int X1_{|X|<1}d\mu\right)^2\\ &\leqq\frac{M}{2}\int Y^2 1_{|Y|<2}\,d\mu+\int X^2 1_{|X|<1}d\mu\cdot M\mu(|X|\geqq 1)\\ &=O(1)\end{aligned}$$

となり，

$$v:=M\int\left(X1_{|X|<1}-\int X1_{|X|<1}\,d\mu\right)^2 d\mu$$

は有限となる．$X1_{|X|\geq 1}$ に対しては，条件（1）〜（4）が成立するから

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M}X_n 1_{|X_n|\geq 1}\in\boldsymbol{R}\right)=1$$

を得る．ここで（3）を否定し，

$$u:=M\int X1_{|X|<1}d\mu$$

が有限でないとする．このとき，チェビシェフの不等式より

$$\mu\left(\left|\sum_{n=1}^{M} X_n 1_{|X_n|<1} - u\right| < 2\sqrt{v}\right) \geqq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

となり，

$$P\left({}^{\circ}\sum_{n=1}^{M} X_n 1_{|X_n|<1} \notin \boldsymbol{R}\right) \geqq \frac{3}{4}$$

が成立するから，上式とあわせて

$$P\left({}^{\circ}\sum_{n=1}^{M} X_n \notin \boldsymbol{R}\right) \geqq \frac{3}{4} > 0$$

となり矛盾する．故に（3）が成立する．

（4）は，

$$\int X^2 1_{|X|<1} d\mu \leqq \int Y^2 1_{|Y|<2} d\mu + 2\left(\int X 1_{|X|<1} d\mu\right)^2$$
$$= O(M^{-1}) + O(M^{-2}) = O(M^{-1})$$

より得られる．（証明終）

註：定理 3.35 の 4 条件より，任意の有限な超実数 c に対して $M\int X^2 1_{|X|<c}\, d\mu$ および $M^{\frac{1}{2}}\int X 1_{|X|<c}\, d\mu$ は有限となる．

〔定理 3.36〕 ${}^*\boldsymbol{R}$ の＊ボレル集合への有限分割 $\{B_k;\ k=0, 1, \cdots, K\}$ は，$a^{-1}=o(M^{\frac{1}{4}})$ を満す超実数 $0<a<1$ が存在して，$B_0 \supset {}^*(-a, a)$ を満すものとする．さらに，定理 3.35 の 4 条件が満されているとき

$$Z_k = {}^{\circ}\sum_{n=1}^{M} X_n 1_{X_n \in B_k} \qquad (k=0, 1, \cdots, K)$$

と定義される確率変数 $Z_0, Z_1, \cdots, Z_K$ は P に関して独立である．

証明：必要とあれば B_0 を二つの部分に分けることにより，$B_0 = {}^*(-a, a)$ と仮定してよい．

$$M_k(\omega) = \#^i\{n;\ X_n(\omega) \in B_k\}$$
$$p_k = \mu(X \in B_k) \qquad (k=0, 1, \cdots, K)$$

とおくとき，

$$\sum_{k=1}^{K} p_k = \mu(X \in B_1 \cup \cdots \cup B_K)$$
$$\leqq \mu(X \in (B_1 \cup \cdots \cup B_K) \cap {}^*(-1, 1)) + \mu(|X| \geqq 1)$$
$$\leqq \frac{1}{a^2}\int X^2 1_{|X|<1} d\mu + \mu(|X| \geqq 1)$$

だから，$\sum_{k=1}^{K} p_k = o(M^{-\frac{1}{2}})$ となる．

さらに，$k=0, 1, \cdots, K$ に対して

$$\int M_k d\mu = Mp_k$$

$$\int (M_k - Mp_k)^2 d\mu = Mp_k(1-p_k)$$

が成立するから，チェビシェフの不等式より，任意の正の超実数 L に対して

$$\mu(|M_k - Mp_k| \leqq L\sqrt{Mp_k(1-p_k)}) \geqq 1 - L^{-2}$$

が成立する．$L = o(M^{\frac{1}{4}})$ となる正の無限超実数 L をとるとき，

$$\mu(|M_k - Mp_k| \leqq L\sqrt{Mp_k(1-p_k)} \quad (k=1, \cdots, K)) \approx 1$$

となる．故に，

$$Y_k = \sum_{n=1}^{M} X_n 1_{X \in B_k} \qquad (k=0, 1, \cdots, K)$$

とおくとき，勝手な有界連続関数 $f_k : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ $(k=0, 1, \cdots, K)$ に対して

$$\begin{aligned}
&E_\mu\left(\prod_{k=0}^{K} f_k(Y_k)\right) \\
&= \sum_{m_0 + \cdots + m_K = M} E_\mu\left(\prod_{k=0}^{K} f_k(Y_k) \,\middle|\, M_k = m_k (k=0, 1, \cdots, K)\right) \\
&\quad \times \mu(M_k = m_k (k=0, 1, \cdots, K)) \\
&= \sum_{m_0 + \cdots + m_K = M} \prod_{k=0}^{K} E_\mu(f_k(Y_k) \mid M_k = m_k) \mu(M_k = m_k \ (k=0, 1, \cdots, K)) \\
&\approx \sum_{\substack{m_0 + \cdots + m_K = M \\ |m_k - Mp_k| \leqq L\sqrt{Mp_k(1-p_k)} \\ (k=1, \cdots, K)}} \prod_{k=0}^{K} E_\mu(f_k(Y_k) \mid M_k = m_k) \\
&\quad \times \mu(M_k = m_k (k=0, 1, \cdots, K))
\end{aligned}$$

が成立する．

上の最後の式における“$\sum$”に付した条件を $m_k (k=0, 1, \cdots, K)$ が満すとき，

$$|M^{-\frac{1}{2}}(m_1 + \cdots + m_K) - M^{\frac{1}{2}}(p_1 + \cdots + p_K)|$$

$$\leqq L(p_1^{\frac{1}{2}}+\cdots+p_K^{\frac{1}{2}})\leqq LK^{\frac{1}{2}}(p_1+\cdots+p_K)^{\frac{1}{2}}$$
$$\approx 0$$

となるから

$$m_1+\cdots+m_K=o(M^{\frac{1}{2}})$$

を得る．故に，この条件の下で

$$\mu(M_k=m_k(k=0,1,\cdots,K))$$
$$=\frac{M!}{m_0!m_1!\cdots m_K!}p_0^{m_0}p_1^{m_1}\cdots p_K^{m_K}$$
$$=\frac{M(M-1)\cdots(M-m_1-\cdots-m_K+1)}{m_1!\cdots m_K!}$$
$$\times(1-p_1-\cdots-p_K)^{M-m_1-\cdots-m_K}p_1^{m_1}\cdots p_K^{m_K}$$
$$=\frac{M^{m_1+\cdots+m_K}}{m_1!\cdots m_K!}e^{-M(p_1+\cdots+p_K)}p_1^{m_1}\cdots p_K^{m_K}(1+o(1))$$
$$=\prod_{k=1}^{K}\frac{(Mp_k)^{m_k}e^{-Mp_k}}{m_k!}(1+o(1))$$

となる．

また，(X_n') を (X_n) と＊独立で，$(X_n')\overset{\mathcal{L}}{=}(X_n)$ を満す＊確率変数列とし，(X_n')をもとに定義される＊確率変数は (X_n) から定義されるものに“$'$”を付して表すこととする．このとき，

$$E_\mu(f_0(Y_0)\,|\,M_0=M)=E_\mu(f_0(Y_0+Y_0')\,|\,M_0=m_0,\ M_0'=M-m_0)$$

が任意の $m_0=0,1,\cdots,M$ に対して成立する．また，$m_0,\cdots,m_K$ に対する前記の条件の下で，$M-m_0=o(M^{\frac{1}{2}})$ であるが，一般に $M-m=o(M^{\frac{1}{2}})$ のとき

$$E_\mu(Y_0'^2\,|\,M_0'=M-m)$$
$$\leqq\frac{E_\mu\left(\left(\sum_{n=1}^{M-m}X_n1_{X_n\in B_0}\right)^2\right)}{\mu(X\in B_0)^2}$$
$$=\frac{(M-m)\int X^2 1_{|X|<a}d\mu+(M-m)(M-m-1)\left(\int X1_{|X|<a}d\mu\right)^2}{1+o(1)}$$

$$=o(1)$$

となり，任意の正数 ε に対して

$$\mu(|Y_0'|\geqq\varepsilon\,|\,M_0'=M-m)=o(1)$$

が成り立つ．故に，

$$\begin{aligned}&E_\mu(f_0(Y_0)\,|\,M_0=M)\\&=E_\mu(f_0(Y_0+Y_0')\,|\,M_0=m,\ \ M_0'=M-m)\\&\approx E_\mu(f_0(Y_0)\,|\,M_0=m)\end{aligned}$$

を得る．これより，

$$\begin{aligned}&E_\mu(f_0(Y_0))\\&\approx\sum_{|m-Mp_0|\leq LK^{1/2}(1-p_0)^{1/2}}E_\mu(f_0(Y_0)\,|\,M_0=m)\,\mu(M_0=m)\\&\approx E_\mu(f_0(Y_0)\,|\,M_0=M)\approx E_\mu(f_0(Y_0)\,|\,M_0=m_0)\end{aligned}$$

が導かれる．

以上を合せると，

$$\begin{aligned}&E_\mu\Big(\prod_{k=0}^{K}f_k(Y_k)\Big)\\&\approx\sum_{\substack{|m_k-Mp_k|\leq L\sqrt{Mp_k(1-p_k)}\\(k=1,\cdots,M)}}E_\mu(f_0(Y_0)\,|\,M_0=M-m_1-\cdots-m_K)\\&\quad\times\prod_{k=1}^{K}E_\mu(f_k(Y_k)\,|\,M_k=m_k)\frac{(Mp_k)^{m_k}e^{-Mp_k}}{m_k!}\\&\approx E_\mu(f_0(Y_0))\times\prod_{k=1}^{K}\sum_{|m_k-Mp_k|\leq L\sqrt{Mp_k(1-p_k)}}E_\mu(f_k(Y_k)\,|\,M_k=m_k)\\&\quad\times\frac{(Mp_k)^{m_k}e^{-Mp_k}}{m_k!}\\&\approx\prod_{k=0}^{K}E_\mu(f_k(Y_k))\end{aligned}$$

が成立する．故に，

$$\begin{aligned}E_P\Big(\prod_{k=0}^{K}f_k(Z_k)\Big)&=E_P\Big(\prod_{k=0}^{K}f_k({}^\circ Y_k)\Big)\\&=E_P\Big({}^\circ\prod_{k=0}^{K}f_k(Y_k)\Big)={}^\circ E_\mu\Big(\prod_{k=0}^{K}f_k(Y_k)\Big)\end{aligned}$$

$$=°\prod_{k=0}^{K} E_\mu(f_k(Y_k))=\prod_{k=0}^{K} E_P(°f_k(Y_k))$$
$$=\prod_{k=0}^{K} E_P(f_k(°Y_k))=\prod_{k=0}^{K} E_P(f_k(Z_k))$$
となり，$Z_0, Z_1, \cdots, Z_k$ の独立性が証明された． (証明終)

3.12 確率空間のローブ拡張

完備な確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ が**完全可分**であるとは，$\mathcal{B}$ の可算部分集合 $\mathcal{D}$ が存在して，$\mathcal{B}$ が $\sigma\mathcal{D}$ の完備化でかつ写像 $\varphi: \Omega\to\{0,1\}^{\mathcal{D}}$ が上への1対1写像となることをいう．ここで，$\omega\in\Omega$ に対して，$\varphi(\omega)\in\{0,1\}^{\mathcal{D}}$ は

$$\varphi(\omega)(D)=\begin{cases}1 & (\omega\in D)\\ 0 & (\omega\notin D)\end{cases}\qquad (D\in\mathcal{D})$$

と定義される．このような $\mathcal{D}$ を**基底**と呼ぶ．$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を U^u に属す完全可分な確率空間とし，$\mathcal{D}$ を基底とする．$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の＊解釈 $({}^*\Omega, {}^*\mathcal{B}, {}^*P)$ は内的確率空間である．これに対応するローブ空間 $({}^*\Omega, L({}^*\mathcal{B}), L({}^*P))$ を $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ と書き，$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の**ローブ拡張**と呼ぶ．

写像 $\pi: \tilde{\Omega}\to\Omega$ を次のように定義する．

$$\omega=\pi(\tilde{\omega})\Longleftrightarrow(\forall D\in\mathcal{D})(\omega\in D\Longleftrightarrow\tilde{\omega}\in{}^*D)$$

明らかに，π は上への写像となる．また，$D\in\mathcal{D}$ のとき $\pi^{-1}D={}^*D$ となる．故に，$\mathcal{D}$ から生成される集合体を $\mathcal{A}$ とするとき，任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，$\pi^{-1}A={}^*A$ が成立する．これより，写像 π が**可測**であること，すなわち，任意の $A\in\mathcal{B}$ に対して，$\pi^{-1}A\in\tilde{\mathcal{B}}$ となることが導かれる．また，写像 π は**保測**である．すなわち，任意の $A\in\mathcal{B}$ に対して，

$$\tilde{P}(\pi^{-1}A)=P(A)$$

が成立する．なぜなら，$A\in\mathcal{A}$ のとき，移行の原理より

$${}^*P(\pi^{-1}A)={}^*P({}^*A)=P(A)$$

だから，$\tilde{P}(\pi^{-1}A)=P(A)$ が成立する．故に，

$$\mathcal{F}=\{A\in\mathcal{B};\ \tilde{P}(\pi^{-1}A)=P(A)\}$$

とおくとき，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{A}$ を含む単調族となり，定理 2.3 より，$\mathcal{F}\supset\sigma\mathcal{A}$ を得る．さらに，任意の $B\in\mathcal{B}$ に対して，$A\subset B\subset C$ かつ $P(A)=P(C)$ となる $A,C\in\sigma\mathcal{A}$ がとれるから，

$$P(A)=\tilde{P}(\pi^{-1}A)\leqq\tilde{P}(\pi^{-1}B)$$
$$\leqq\tilde{P}(\pi^{-1}C)=P(C)=P(A)$$

を得る．故に，

$$P(B)=P(A)=\tilde{P}(\pi^{-1}B)$$

が成立し，写像 π は保測となる．また，明らかに，$\pi({}^*\omega)=\omega$ が任意の $\omega\in\Omega$ に対して成立する．この写像 π を**拡張写像**と呼ぶ．

〔**定理 3.37**〕 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{B}},\tilde{P})$ を完全可分な確率空間 $(\Omega,\mathcal{B},P)\in U^u$ のローブ拡張とするとき，任意の $B\in\mathcal{B}$ に対して

$$\tilde{P}({}^*B\triangle\pi^{-1}B)=0$$

が成立する．また，拡張写像 π は $\tilde{P}$-$a.a$ の意味で，基底のとり方に依存しない．

証明：完全可分な確率空間 $(\Omega,\mathcal{B},P)$ の基底を $\mathcal{D}$ とし，$\mathcal{A}$ を $\mathcal{D}$ から生成される集合体とする．このとき，

$$\mathcal{F}=\{A\in\mathcal{B};\ \tilde{P}({}^*A\triangle\pi^{-1}A)=0\}$$

とおけば，任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，${}^*A=\pi^{-1}A$ が成立するから $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}$ となる．次に $\mathcal{F}$ が単調族であることを示す．$\mathcal{F}$ の元の増大列 $A_1\subset A_2\subset\cdots$ が与えられ，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ とおくとき，任意の正の実数 ε に対して，$n\in\boldsymbol{N}_0$ が存在して

$$P(A\backslash A_n)<\varepsilon$$
$$\tilde{P}(\pi^{-1}A\backslash\pi^{-1}A_n)<\varepsilon$$

が成立する．このとき，移行の原理より

$$\tilde{P}({}^*A\backslash{}^*A_n)={}^\circ{}^*P({}^*A\backslash{}^*A_n)$$
$$=P(A\backslash A_n)<\varepsilon$$

となるから

$$\tilde{P}({}^*A\triangle\pi^{-1}A)$$

$$\leqq \tilde{P}(^*A \backslash {}^*A_n) + \tilde{P}(^*A_n \triangle \pi^{-1}A_n) + \tilde{P}(\pi^{-1}A \backslash \pi^{-1}A_n)$$
$$< 2\varepsilon$$

を得る．ε は任意だから，

$$\tilde{P}(^*A \triangle \pi^{-1}A) = 0$$

となり，$A \in \mathscr{F}$ が成立する．同様に，$\mathscr{F}$ は，単調減少極限についても閉じており，単調族となる．これより，$\mathscr{F} \supset \sigma\mathscr{A}$ となり，これより，$\mathscr{F} = \mathscr{B}$ が導かれる．

別の基底 $\mathscr{D}'$ をとり，対応する拡張写像を π' と書く．

$$\Lambda = \bigcup_{D \in \mathscr{D}} \pi^{-1}D \triangle \pi'^{-1}D$$

とおくとき，上の結果を写像 π と π' に適用すると，

$$\tilde{P}(\Lambda) \leqq \sum_{D \in \mathscr{D}} \tilde{P}(\pi^{-1}D \triangle \pi'^{-1}D)$$
$$= \sum_{D \in \mathscr{D}} \tilde{P}(^*D \triangle \pi'^{-1}D) = 0$$

となる．さらに，$\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \backslash \Lambda$ のとき，任意の $D \in \mathscr{D}$ に対して

$$\pi(\tilde{\omega}) \in D \Longleftrightarrow \pi'(\tilde{\omega}) \in D$$

が成立し，$\mathscr{D}$ は基底だから，$\pi(\tilde{\omega}) = \pi'(\tilde{\omega})$ となる．故に，$\pi(\tilde{\omega}) = \pi'(\tilde{\omega})$ が $\tilde{P}$-$a.a.$ $\tilde{\omega}$ に対して成立する．　　　　（証明終）

〔定理 3.38〕　定理 3.37 と同じ条件の下で，$(\Omega, \mathscr{B}, P)$ 上の任意の実数値確率変数 X に対して，その**拡張** $\tilde{X}$ を $X \circ \pi$ と定義する．$\tilde{X}$ はローブ拡張 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{B}}, \tilde{P})$ 上の確率変数で，$\tilde{X}(\tilde{\omega}) = {}^\circ{}^*X(\tilde{\omega})$ が $\tilde{P}$-$a.a.$ $\tilde{\omega}$ に対して成立する．

証明：有理数の全体を $\boldsymbol{Q}$ とし，$a<b$ を満す任意の $a, b \in \boldsymbol{Q}$ に対して

$$C_{a,b} = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in (a, b)\}$$

とおく．また，

$$\Lambda = \bigcup_{\substack{a, b \in Q \\ a<b}} {}^*C_{a,b} \triangle \pi^{-1}C_{a,b}$$

とおくとき，定理 3.37 より，$\tilde{P}(\Lambda) = 0$ となる．さらに，任意の $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \backslash \Lambda$ と $a<b$ を満す任意の $a, b \in \boldsymbol{Q}$ に対して

$$*X(\tilde{\omega})\in{}^*(a,b)\Longleftrightarrow\tilde{\omega}\in{}^*C_{a,b}$$
$$\Longleftrightarrow\tilde{\omega}\in\pi^{-1}C_{a,b}\Longleftrightarrow\pi\tilde{\omega}\in C_{a,b}$$
$$\Longleftrightarrow X(\pi\tilde{\omega})\in(a,b)$$

が成立するから，$°{}^*X(\tilde{\omega})=X(\pi\tilde{\omega})$ となる．故に，$°{}^*X(\tilde{\omega})=\tilde{X}(\tilde{\omega})$ が $\tilde{P}$-$a.a.\,\tilde{\omega}$ に対して成立する． (証明終)

3.13 無限分解可能な分布

前節と同様に，完全可分な確率空間 $(\Omega,\mathcal{B},P)\in U^u$ と，そのローブ拡張 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{B}},\tilde{P})$ を考える．Ω 上の実数値確率変数 Z が**無限分解可能**であるとは，任意の $m\in\boldsymbol{N}_0$ に対して，独立で同一分布に従う確率変数列 $X_1,\cdots,X_m$ が存在して

$$Z\overset{\mathcal{L}}{=}X_1+\cdots+X_m$$

が成立することをいう．また，他の確率空間（例えば，$\tilde{\Omega}$）上の確率変数も，この Z と同じ分布をもつとき，**無限分解可能**という．

〔定理 3.39〕（レヴィの標準形）　$b\in\boldsymbol{R}$ と

$$\int\frac{dG(x)}{1+x^2}<\infty$$

を満す $\boldsymbol{R}$ 上の広義の分布関数 G に対して，関数 $\varphi(G,b):\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$ を

$$\varphi(G,b)(t)=\exp\left(\int\frac{e^{itx}-1-it\sin x}{x^2}dG(x)+ibt\right)\qquad(\forall t\in\boldsymbol{R})$$

と定義する．Ω 上の確率変数 Z が無限分割可能なら，G と b が存在して $\varphi_Z=\varphi(G,b)$ となる．逆に，任意の G と b に対して，$\varphi(G,b)$ は，Ω 上の無限分解可能な確率変数の特性関数となる．

証明：Z が無限分解可能だとする．このとき，移行の原理より，任意の $M\in{}^*\boldsymbol{N}_0$ に対して

$${}^*Z\overset{\mathcal{L}}{=}X_1+\cdots+X_M$$

を満す $({}^*\Omega,{}^*\mathcal{B},{}^*P)$ 上の＊独立同一分布に従う＊確率変数列 $(X_n;\,n=1,\cdots,M)$ が存在する．${}^*\boldsymbol{N}_0\backslash\boldsymbol{N}$ の元 M を一つとり固定する．$Y=X_1$

$+\cdots+X_M$ とおくとき，$Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} {}^*Z$ かつ定理 3.38 より $\tilde{Z}(\tilde{\omega})={}^\circ{}^*Z(\tilde{\omega})$ ($\tilde{P}$-$a.a.\,\omega$) だから

$$\tilde{P}({}^\circ Y\in \boldsymbol{R})=\tilde{P}({}^\circ{}^*Z\in \boldsymbol{R})=\tilde{P}(\tilde{Z}\in \boldsymbol{R})=P(Z\in \boldsymbol{R})=1$$

が成立する．故に，定理 3.35 の条件（1）～（4）が成立する（$X=X_1$ とおく）．また，移行の原理と定理 3.34 より，任意の $t\in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\varphi_Z(t)=\varphi_{{}^*Z}(t)=\varphi_Y(t)=\varphi_X(t)^M$$
$$={}^\circ(\varphi_X(t)^M)=e^{{}^\circ M(\varphi_X(t)-1)}$$

が成立する．さらに，

$$M(\varphi_X(t)-1)=M\int(e^{itX}-1)\,d^*P$$
$$=\int\frac{e^{itX}-1-it\sin X}{X^2}MX^2d^*P+iMat$$

となる．ただし，

$$a=\int\sin Xd^*P$$

とおいた．

ここで，aM が有限であることを示す．$|x|<1$ のとき，

$$x-\frac{x^2}{2}\leqq\sin x\leqq x+\frac{x^2}{2}$$

が成立するから，

$$a\leqq\int 1_{|X|\geqq1}\,d^*P+\int\left(X+\frac{X^2}{2}\right)1_{|X|<1}d^*P$$
$$={}^*P(|X|\geqq1)+\int X1_{|X|<1}d^*P+\frac{1}{2}\int X^2 1_{|X|<1}d^*P$$

かつ

$$a\geqq-\int 1_{|X|\geqq1}d^*P+\int\left(X-\frac{X^2}{2}\right)1_{|X|<1}d^*P$$
$$=-{}^*P(|X|\geqq1)+\int X1_{|X|<1}d^*P-\frac{1}{2}\int X^2 1_{|X|<1}d^*P$$

を得る．故に，定理 3.35 の条件（2）～（4）より，aM は有限となる．$b={}^\circ(aM)$ とおく．

X の $*$ 分布を F_X とおくとき，

$$M(\varphi_X(t)-1)=\int\frac{e^{itx}-1-it\sin x}{x^2}Mx^2dF_X(x)+iMat$$

と書ける．各 $l\in N_0$ に対して

$$\int_{^*[-l,l]}Mx^2dF_X(x)$$
$$\leqq M\int X^2 1_{|X|<1}d^*P+l^2M^*P(|X|\geqq 1)$$

だから，$\int_{^*[-l,l]}Mx^2dF_X(x)$ は有限となる．$\mathcal{A}$ を $\boldsymbol{R}$ 上のボレル集合体とする．$^*\mathcal{A}$ 上の有限な内的測度 Q_l を

$$Q_l(A)=\int_{A\cap^*[-l,l]}Mx^2dF_X(x)\qquad(A\in{}^*\mathcal{A})$$

と定義する．有限な内的測度空間（$^*\boldsymbol{R}$，$^*\mathcal{A}$，Q_l）に対応するローブ測度空間（$^*\boldsymbol{R}$，$L_l(^*\mathcal{A})$，$L(Q_l)$）を考える．このとき，

$$L(Q_l)=L(Q_{l+1})|_{^*[-l,l]}\qquad(l=1,2,\cdots)$$

が成立する．ただし，$L(Q_{L+1})$ の $^*[-l,l]$ への制限は

$$L(Q_{l+1})|_{^*[-l,l]}(A)=L(Q_{l+1})(A\cap{}^*[-l,l])\qquad(A\in L_l(^*\mathcal{A}))$$

と定義する．また，

$$L_1(^*\mathcal{A})\supset L_2(^*\mathcal{A})\supset\cdots$$

が成立する．

$$L(^*\mathcal{A})=\bigcap_{l=1}^{\infty}L_l(^*\mathcal{A})$$

とおき，（$^*\boldsymbol{R}$，$L(^*\mathcal{A})$）上の測度 Q を

$$Q(A)=\lim_{l\to\infty}L(Q_l)(A)\qquad(A\in L(^*\mathcal{A}))$$

と定義する．無限の超実数全体を $^*\boldsymbol{R}_{\mathrm{inf}}$ と書くとき，$Q(^*\boldsymbol{R}_{\mathrm{inf}})=0$ となる．また，

$$^*\boldsymbol{R}=\bigcup_{l=1}^{\infty}{}^*\boldsymbol{R}_{\mathrm{inf}}\cup{}^*[-l,l]$$

かつ

$$Q(^*\boldsymbol{R}_{\mathrm{inf}}\cup{}^*[-l,l])<\infty$$

だから，Q は σ 有限となる．$\boldsymbol{R}$ 上の広義の分布関数 G を

$$G(x)=\begin{cases} \lim_{n\to\infty} Q\left({}^*\left(0, x+\frac{1}{n}\right)\right) & (x\geqq 0) \\ -\lim_{n\to\infty} Q\left({}^*\left(x+\frac{1}{n}, 0\right)\right) & (x<0) \end{cases}$$

と定義するとき，任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して

$$\int_A dG=Q(\mathrm{st}^{-1}A)$$

が成立する．ただし，st: $^*\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ は標準部分写像．

このとき，任意の $t\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$f(x)=\frac{e^{itx}-1-it\sin x}{x^2} \qquad (x\neq 0)$$

$$f(0)=-\frac{t^2}{2}$$

とおくとき，$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$ は有界連続関数となり，この＊解釈を同じ f で表すとき，任意の有限な $x\in{}^*\boldsymbol{R}$ に対して，$f({}^\circ x)={}^\circ f(x)$ が成立する．また，

$$\sup_{x\in\boldsymbol{R}}|f(x)|x^2<\infty$$

$$c:=\sup_{x\in\boldsymbol{R}}|f(x)|<\infty$$

だから，定理 3.35 の（2），（4）より

$$\begin{aligned}
&\int|{}^\circ f(x)|dQ(x)\\
&=\lim_{l\to\infty}\int{}^\circ|f(x)|dL(Q_l)(x)\\
&=\lim_{l\to\infty}{}^\circ\int|f(x)|Mx^2 1_{|x|\leqq l}dF_X(x)\\
&\leqq{}^\circ\left(cM\int x^2 1_{|x|<1}dF_X(x)+dM\int 1_{|x|\geqq 1}dF_X(x)\right)\\
&=c^\circ\left(M\int X^2 1_{|X|<1}d^*P\right)+d^\circ(M^*P(|X|\geqq 1))<\infty
\end{aligned}$$

となり，${}^\circ f$ は Q に関して可積分となる．

故に，

$$\int f(x)\,dG(x)$$
$$=\int f({}^\circ x)\,dQ(x)=\int {}^\circ f(x)\,dQ(x)$$
$$=\lim_{l\to\infty}\int {}^\circ f(x)\,dL(Q_l)(x)$$
$$=\lim_{l\to\infty}{}^\circ\int f(x)\,Mx^2 1_{|x|\le l}dF_X(x)$$
$$=\lim_{l\to\infty}{}^\circ\left(M\int (e^{itX}-1-it\sin X)1_{|X|\le l}d^*P\right)$$

が成立する．ここで，定理 3.35 の（1）と永続性の原理より

$$\lim_{l\to\infty}{}^\circ\left(M\int 1_{|X|>l}d^*P\right)=0$$

となり，また

$$\sup_{x\in{}^*R}|e^{itx}-1-it\sin x|$$

は有限だから

$$\int f(x)\,dG(x)={}^\circ\left(M\int (e^{itX}-1-it\sin X)\,d^*P\right)$$
$$={}^\circ(M(\varphi_X(t)-1)-iMat)$$
$$={}^\circ M(\varphi_X(t)-1)-ibt$$

が成立する．よって，

$$\varphi_Z(t)=e^{{}^\circ M(\varphi_X(t)-1)}$$
$$=\exp\left(\int\frac{e^{itx}-1-it\sin x}{x^2}dG(x)+ibt\right)$$

を得る．また，

$$\int\frac{dG(x)}{1+x^2}=\int{}^\circ\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dQ(x)$$
$$=\lim_{l\to\infty}\int{}^\circ\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dL(Q_l)(x)$$
$$=\lim_{l\to\infty}{}^\circ\int\frac{1}{1+X^2}MX^2 1_{|X|\le l}d^*P$$
$$\leqq{}^\circ\left(M\int X^2 1_{|X|<1}d^*P+M^*P(|X|\geqq 1)\right)$$
$$<\infty$$

が成立する．

逆に，任意の $b\in\boldsymbol{R}$ と

$$\int\frac{dG(x)}{1+x^2}<\infty$$

を満す $\boldsymbol{R}$ 上の広義の分布関数 G に対して，$\varphi(G,b)$ はある確率変数の特性関数となることを示す．各 $k\in\boldsymbol{N}_0$ に対して

$$\varphi_k(t)=\exp\left(-\frac{t^2}{2}dG(0)+\int_{|x|\geqq\frac{1}{k}}\frac{e^{itx}-1-it\sin x}{x^2}dG(x)+ibt\right)$$

とおく．ただし，$dG(0)=G(0)-G(-0)$．ここで，$k\to\infty$ のとき，$\varphi_k(t)$ は任意の有界集合上で一様に $\varphi(t)$ に収束する．また，

$$v=dG(0)$$

$$\lambda=\int_{|x|\geqq\frac{1}{k}}\frac{dG(x)}{x^2}$$

$$dF(x)=\frac{1}{\lambda x^2}1_{|x|\geqq\frac{1}{k}}dG(x)$$

$$m=b-\int_{|x|\geqq\frac{1}{k}}\frac{\sin x}{x^2}dG(x)$$

とおくとき，

$$\varphi_k(t)=\exp\left(-\frac{vt^2}{2}+\lambda\int(e^{itx}-1)\,dF(x)+imt\right)$$

だから，$\varphi_k(t)$ は確率変数 $V+W+m$ の特性関数となる．ただし，V と W は独立で，V の分布は正規分布 $N(0,v)$，W の分布は複合ポアソン分布 $P(\lambda,F)$．故に，定理 2.17 より，$\varphi(t)$ はある分布関数の特性関数となる．また，任意の分布に対して，それを分布とする Ω 上の確率変数の存在が容易に示せるから，φ を特性関数とする確率変数の存在が証明された．

Ω 上の確率変数 Z が，$\varphi_Z=\varphi(G,b)$ を満すとき，任意の $m\in\boldsymbol{N}_0$ に対して

$$\varphi(G,b)=\varphi\left(\frac{G}{m},\ \frac{b}{m}\right)^m$$

だから，同一の $\varphi(G/m,\ b/m)$ を特性関数とする独立な確率変数列 X_1,

$\cdots, X_m$ が存在して

$$Z \overset{\mathcal{L}}{\approx} X_1 + \cdots + X_m$$

となる．よって，Z は無限分解可能となる．　　　　　　　　　　　（証明終）

〔**定理 3.40**〕（中心極限定理）　$X_1, X_2, \cdots$ は Ω 上の独立同一分布に従う実数値確率変数列で，$E(X_1)=0$ かつ $V(X_1)=v<\infty$ を満すものとする．この確率変数列の＊解釈を考える．このとき，任意の $M \in {}^*\boldsymbol{N}_0 \setminus \boldsymbol{N}_0$ に対して，$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{B}}, \tilde{P})$ 上の確率変数

$$°\left(\frac{{}^*X_1 + \cdots + {}^*X_M}{\sqrt{M}}\right)$$

は正規分布 $N(0, v)$ をもつ．より一般に，$M \in {}^*\boldsymbol{N}_0 \setminus \boldsymbol{N}_0$ と $\tilde{\Omega}$ 上の＊独立同一分布に従う ${}^*\boldsymbol{R}$ 値＊確率変数列（Y_n; $n=1, \cdots, M$）で，$Y=Y_1$ とおくとき，$\int Y d{}^*P=0$ かつ MY^2 が $S{}^*P$ 可積分となるものが与えられ，

$$Z=\sum_{n=1}^{M} Y_n$$

とおくとき，$\tilde{P}(°Z \in \boldsymbol{R})=1$ かつ $°Z$ は $\tilde{P}$ に関して，正規分布 $N(0, °v)$ に従う．ただし，$v := \int MY^2 d{}^*P$ は仮定より有限となる．

証明：任意の正の超実数 L に対して

$${}^*P(|Y| \geqq L) \leqq E_{{}^*P}\left(\frac{Y^2}{L^2}\right) = \frac{v}{L^2 M}$$

となる．故に，L が無限のとき，

$$M{}^*P(|Y| \geqq L) \leqq \frac{v}{L^2} \approx 0$$

また，$L=1$ のとき，

$$M{}^*P(|Y| \geqq 1) \leqq v$$

は有限となる．また，$\int Y d{}^*P=0$ だから，

$$\left| M \int Y 1_{|Y|<1} d{}^*P \right|$$
$$= \left| M \int Y 1_{|Y| \geqq 1} d{}^*P \right|$$

$$\leqq M\left(\int Y^2 d^*P\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int 1_{|Y|\geqq 1} d^*P\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= v^{\frac{1}{2}}(M^*P(|Y|\geqq 1))^{\frac{1}{2}}$$

は有限となる．最後に，

$$M\int Y^2 1_{|Y|<1} d^*P \leqq M\int Y^2 d^*P = v$$

は有限となる．以上より，定理 3.35 を用いると，$\tilde{P}({}^\circ Z \in \boldsymbol{R}) = 1$ が成立する．故に，定理 3.39 より，${}^\circ Z$ は無限分解可能となり，$\varphi_{{}^\circ Z} = \varphi(G, b)$ と書ける．

以下，$b=0$ かつ dG は 0 のみに集中し，$dG(0)=v$ となることを示す．$\int Z^2 d^*P$ が有限だから，Z は S^*P 可積分となり

$$\int {}^\circ Z d\tilde{P} = {}^\circ\int Z d^*P$$

$$= {}^\circ\sum_{n=1}^{M}\int Y_n d^*P = 0$$

を得る．故に

$$\varphi_{{}^\circ Z}'(0) = i\int {}^\circ Z d\tilde{P} = 0$$

となるが，他方

$$\varphi(G, b)'(0) = ib$$

だから $b=0$ となる．さらに，任意の正の実数 ε に対して，MY^2 が S^*P 可積分だから

$$\int MY^2 1_{|Y|\geqq\varepsilon} d^*P$$

$$= \int MY^2 1_{|MY^2|\geqq \varepsilon M} d^*P \approx 0$$

$$\int MY^2 1_{|Y|<\varepsilon} d^*P$$

$$\approx \int MY^2 d^*P = v$$

だから，定理 3.39 の証明より

$$\int_{(-\varepsilon,\varepsilon)^c} dG=0, \qquad \int_{(-\varepsilon,\varepsilon)} dG={}^\circ v$$

を得る．ε は任意だから，dG は 0 のみに集中し，$dG(0)={}^\circ v$ となる．

以上より，

$$\varphi_{{}^\circ Z}(t)=e^{-\frac{{}^\circ vt^2}{2}} \qquad (\forall t\in\boldsymbol{R})$$

となり，${}^\circ Z$ の分布は $N(0, {}^\circ v)$ となる． （証明終）

3.14 超有限確率過程

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の実数値確率変数列 $(X_t;\ t\in T)$ を T 上の**確率過程**と呼ぶ．ここで，$T\subset[0,\infty)$ とする．とくに，$T=[0,\infty)$ のとき，単に，確率過程と呼ぶ．また，T が${}^*[0,\infty)$ の超有限集合で，各 $t\in T$ に対して，X_t の値域が超有限集合 のとき，T 上の内的確率過程 $(X_t; t\in T)$ は**超有限確率過程**と呼ばれる．以下の議論では，$M\in{}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N}$ を一つ固定し，$\Delta t=M^{-1}$ とおき，

$$T:=\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, M^2\Delta t\}$$

と定義する．また，$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ を内的確率空間とし，この上の内的確率過程 $(X_t;\ t\in T)$ を考える．

内的確率過程 $(X_t;\ t\in T)$ が **S 有限**であるとは，任意の有限な $t\in T$ に対して，P-$a.a.\ \omega\in\Omega$ が ${}^\circ X_t(\omega)\in\boldsymbol{R}$ を満すことをいう．ここで，$P=L(\mu)$ とおいた．また，**S 可積分**であるとは，任意の有限な $t\in T$ に対して，X_t が $S\mu$ 可積分なことをいう．さらに，**S 連続**であるとは，P-$a.a.\ \omega\in\Omega$ に対して，**見本関数** $T\ni t\longmapsto X_t(\omega)\in\Sigma$ が S 連続となることをいう．また，ローブ確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$（ただし，$\mathcal{B}=L(\mathcal{A})$）上の**確率過程** $(Y_t;\ t\in[0,\infty))$ が内的確率過程 $(X_t;\ t\in T)$ の**標準部分**であるとは，$P(\Omega_0)=1$ となる $\Omega_0\in\mathcal{B}$ が存在して，任意の $\omega\in\Omega_0$ と有限な $t\in T$ に対して

$$Y_{{}^\circ t}(\omega)={}^\circ X_t(\omega)$$

が成立することをいう．このような二つの確率過程 $(Y_t;\ t\in[0,\infty))$ と

$(Z_t;\ t\in[0,\infty))$ があれば，P-$a.a.\ \omega\in\Omega$ に対して

$$Y_t(\omega)=Z_t(\omega) \qquad (\forall t\in[0,\infty))$$

が成立する．この意味で，標準部分は一意的に定まる．これを $({}^\circ X_t;\ t\in[0,\infty))$ と記す．定理 3.23 より，これは**連続**な確率過程となる．すなわち，P-$a.a.\ \omega\in\Omega$ に対して，見本関数 $[0,\infty)\ni t\longmapsto {}^\circ X_t(\omega)\in\boldsymbol{R}$ は連続となる．

〔**定理 3.41**〕　内的確率過程 $(X_t;\ t\in T)$ は，S 有限かつ S 連続のとき，標準部分をもつ．$({}^\circ X_t;\ t\in[0,\infty))$ は連続な確率過程となる．

証明：T の有限な元からなる可算部分集合 D で，$\{{}^\circ t;\ t\in D\}$ が $[0,\infty)$ で稠密となるものをとる．$(X_t;\ t\in T)$ が S 有限かつ S 連続だから，$P(\Omega_0)=1$ となる $\Omega_0\in\mathcal{B}$ で，任意の $\omega\in\Omega_0$ と $t\in D$ に対して ${}^\circ X_t(\omega)\in\boldsymbol{R}$，かつ，任意の $\omega\in\Omega_0$ に対して，見本関数 $t\longmapsto X_t(\omega)$ が S 連続となるものがとれる．このとき，任意の有限な $t\in T$ と $\omega\in\Omega_0$ に対して ${}^\circ X_t(\omega)\in\boldsymbol{R}$ となることが容易に示せる．すなわち，任意の $\omega\in\Omega_0$ に対して見本関数 $t\longmapsto X_t(\omega)$ は S 有限かつ S 連続となり標準部分をもつ．故に，$(X_t;\ t\in T)$ は標準部分をもつ．　　　　(証明終)

内関数 $F: T\to{}^*\boldsymbol{R}$ が **S 右連続**であるとは，任意の $t\in[0,\infty)$ に対して，${}^\circ\xi=t$ となる $\xi\in T$ が存在して，${}^\circ\eta=t$ かつ $\eta\geqq\xi$ となる任意の $\eta\in T$ に対して，$F(\xi)\approx F(\eta)$ が成立することをいう．同様に，**S 左連続**であることを定義する．

〔**定理 3.42**〕　S 有限な内関数 $F: T\to{}^*\boldsymbol{R}$ が S 右連続でないかまたは S 左連続でないとき，$b-a>0$ となる $a,b\in\boldsymbol{Q}$ が存在して，F の $*$ 区間 $^*(a,b)$ に対する上向き通過数は無限の超自然数となる．

証明：F が S 右連続でないとする．このとき，$t\in[0,\infty)$ が存在して，${}^\circ\xi=t$ となる任意の $\xi\in T$ に対して，${}^\circ\eta=t$ かつ $\eta\geqq\xi$ となる $\eta\in T$ が存在して，$F(\xi)\not\approx F(\eta)$ となる．このとき，$n\in\boldsymbol{N}_0$ が存在して，${}^\circ\xi=t$ となる任意の $\xi\in T$ に対して，${}^\circ\eta=t$ かつ $\eta\geqq\xi$ となる $\eta\in T$ が存在して，$|F(\xi)-F(\eta)|\geqq 1/n$ となることを示す．

もし，これを否定すると，各 $n\in \boldsymbol{N}_0$ に対して，$°\xi_n=t$ となる $\xi_n\in T$ が存在して，$°\eta=t$ かつ $\eta\geqq\xi_n$ となる任意の $\eta\in T$ に対して，$|F(\xi_n)-F(\eta)|<1/n$ となる．故に，任意の $m\in {}^*\boldsymbol{N}_0\backslash \boldsymbol{N}_0$ に対して，命題

$$(\forall\eta)\left[\xi_n\leqq\eta\leqq\xi_n+\frac{1}{m}\wedge\eta\in T\longrightarrow|F(\xi_n)-F(\eta)|<\frac{1}{n}\right]$$

が成立する．永続性の原理より，ある $m\in \boldsymbol{N}_0$ に対してもこの命題が成立することとなる．故に，$\xi_n\lneqq\eta_n<\xi_n+1/n$ となる $\eta_n\in T$ が存在して，${}^*[\xi_n, \eta_n]\cap T$ に属す任意の η に対して，$|F(\xi_n)-F(\eta)|<1/n$ が成立する．内集合の可算列 ${}^*[\xi_n, \eta_n]\cap T$ $(n\in \boldsymbol{N}_0)$ は有限交差性をもつから交差的となる．

$$\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}{}^*[\xi_n, \eta_n]\cap T$$

とすると，$°\xi=t$ が成立する．また，$°\eta=t$ かつ $\xi\leqq\eta$ を満す任意の $\eta\in T$ は，

$$\eta\in\bigcap_{n=1}^{\infty}{}^*[\xi_n, \eta_n]\cap T$$

となるから，$|F(\xi)-F(\eta)|<2/n$ が任意の $n\in \boldsymbol{N}_0$ に対して成立する．すなわち，$F(\xi)\approx F(\eta)$ となり仮定に反す．

よって，正の実数 δ が存在して，$°\xi=t$ となる任意の $\xi\in T$ に対して，$°\eta=t$ かつ $\xi\leqq\eta$ となる $\eta\in T$ が存在して，$|F(\xi)-F(\eta)|\geqq\delta$ となる．F は S 有限だから，

$$\max_{\xi\in T\cap{}^*(t-1,t+1)}|F(\xi)|$$

は有限な超実数である．故に，

$$a':=\sup_{°\xi=t}\inf_{\substack{°\eta=t\\ \eta\in T\\ \eta\geqq\xi}}°F(\eta)+\frac{\delta}{3}$$

$$b':=\inf_{°\xi=t}\sup_{\substack{°\eta=t\\ \eta\in T\\ \eta\geqq\xi}}°F(\eta)-\frac{\delta}{3}$$

とおくとき，a', b' は $-\infty<a'<b'<\infty$ を満す実数で，かつ，F の区間 ${}^*(a', b')$ に対する上向き通過数は無限の超自然数となる．故に，$a'<a<b<b'$ を満す $a, b\in \boldsymbol{Q}$ を選べばよい．

F が左連続でない場合についても証明は同様である．　　　（証明終）

関数f：$[0,\infty)\to\boldsymbol{R}$が内関数$F$：$T\to{}^*\boldsymbol{R}$の**右標準部分**であるとは，任意の$t\in\boldsymbol{R}$に対して，$°\xi=t$となる$\xi$が存在して，$°\eta=t$かつ$\eta\geqq\xi$となる任意の$\eta\in T$に対して，$f(t)=°F(\eta)$が成立することをいう．$F$の右標準部分となる$f$は，存在すれば一意的で，これを$°^{+}F$と記す．**左標準部分**も同様に定義され，$°^{-}F$と記される．実数値確率過程（$Y_t$; $t\in[0,\infty)$）が内的確率過程（X_t; $t\in T$）の**右標準部分**であるとは，$P(\Omega_0)=1$となる$\Omega_0\in\mathcal{B}$で，任意の$\omega\in\Omega_0$に対して，見本関数$[0,\infty)\ni t\longmapsto Y_t(\omega)\in\boldsymbol{R}$が見本関数$T\ni t\longmapsto X_t(\omega)\in{}^*\boldsymbol{R}$の右標準部分となることをいう．右標準部分は，標準部分のときと同じ意味で，一意的に定まり，これを（$°^{+}X_t$; $t\in[0,\infty)$）と記す．**左標準部分**（$°^{-}X_t$; $t\in[0,\infty)$）についても同様に定義する．

〔定理 3.43〕　内関数F：$T\to{}^*\boldsymbol{R}$がS有限でS右連続かつS左連続のとき，右標準部分$°^{+}F$：$[0,\infty)\to\boldsymbol{R}$が存在し，すべての点で右連続かつ左極限をもつ．また，左標準部分$°^{-}F$も存在し，$°^{+}F(t-0)=°^{-}F(t)$（$\forall t\in[0,\infty)$）が成立する．

証明：任意の$t\in[0,\infty)$に対して，FがS有限だから

$$\max_{\xi\in T\cap{}^*(t-1,t+1)}|F(\xi)|$$

は有限な超実数となる．FがS右連続かつS左連続だから，$°\xi=°\eta=t$となる$\xi,\eta\in T$が存在して，$°\zeta=t$かつ$\zeta\geqq\xi$となる任意の$\zeta\in T$に対して，$F(\xi)\approx F(\zeta)$，また，$°\zeta=t$かつ$\zeta\leqq\eta$となる任意の$\zeta\in T$に対して，$F(\eta)\approx F(\zeta)$が成立する．$F(\xi)$および$F(\eta)$は有限だから

$$f(t):=°F(\xi)\in\boldsymbol{R}$$
$$g(t):=°F(\eta)\in\boldsymbol{R}$$

となる$f(t)$および$g(t)$がwell definedとなる．このとき，明らかに，fはFの右標準部分，gはFの左標準部分となる．

fが任意の$t\in[0,\infty)$において右連続かつ左極限をもち，$f(t-0)=g(t)$となることを示す．上記のようなξおよびηをとる．任意の正の実数εをとる．このとき，任意の$m\in{}^*\boldsymbol{N}_0\backslash\boldsymbol{N}_0$に対して，命題

$$(\forall\zeta)\left[\xi\leqq\zeta\leqq\xi+\frac{1}{m}\wedge\zeta\in T \Longrightarrow |F(\xi)-F(\zeta)|<\varepsilon\right]$$

が成立するから，永続性の原理より，ある $m\in \boldsymbol{N}_0$ に対しても，これが成立する．故に，正の実数 $\delta<1$ が存在して，任意の $\zeta\in T\cap{}^*[\xi,\xi+\delta)$ に対して，$|F(\xi)-F(\zeta)|<\varepsilon$ となる．同様に，任意の $\zeta\in T\cap{}^*(\eta-\delta,\eta]$ に対して，$|F(\eta)-F(\zeta)|<\varepsilon$ となる．このとき，任意の実数 $s\in(t,t+\delta/2)$ に対して，$\zeta\in T\cap{}^*[\xi,\xi+\delta)$ が存在して，$f(s)\approx F(\zeta)$ となるから

$$\begin{aligned}&|f(t)-f(s)|\\&\leqq|f(t)-F(\xi)|+|F(\xi)-F(\zeta)|+|f(s)-F(\zeta)|\\&<2\varepsilon\end{aligned}$$

となる．故に，f は t で右連続である．同様に，g は t で左連続となる．さらに，任意の実数 $s\in(t-\delta/2,t)$ に対して，上と同様に，$f(s)\approx F(\zeta)$ となる $\zeta\in T\cap{}^*(\eta-\delta/2,\eta]$ が存在して

$$\begin{aligned}&|g(t)-f(s)|\\&\leqq|g(t)-F(\eta)|+|F(\eta)-F(\zeta)|+|f(s)-F(\zeta)|\\&<2\varepsilon\end{aligned}$$

となるから，$f(t-0)=g(t)$ が成立する．　　　　(証明終)

3.15 超有限マルチンゲール

前節と同じ記号を用いる．内的確率過程 $(X_t;\ t\in T)$ が内的集合体列 $(\mathcal{A}_t;\ t\in T)$ に関して＊**マルチンゲール**であることを，マルチンゲールの概念の＊解釈として定義する．すなわち，$E_\mu(X_t|\mathcal{A}_s)=X_s$ が $s\leqq t$ を満す任意の $s,t\in T$ に対して成立する．超有限確率過程でもある＊マルチンゲールは，とくに，**超有限マルチンゲール**とも呼ばれる．

〔**定理 3.44**〕　すべての有限な $t\in T$ に対して，$\int|X_t|d\mu$ が有限となる超有限マルチンゲール $(X_t;\ t\in T)$ の見本関数は P に関して確率1で S 有限，S 右連続かつ S 左連続となる．故に，それは右標準部分をもち，右標準部分の見本関数は確率1で右連続かつ左極限をもつ．さら

に，$(X_t;\ t\in T)$ が S 可積分のとき，$({}^{\circ+}X_t;\ t\in[0,\infty))$ は，σ 集合体の列 $(\mathscr{B}_t;\ t\in[0,\infty))$ に関してマルチンゲールとなる．ただし，$t\in[0,\infty)$ に対して

$$\mathscr{B}_t=\bigcap_{\substack{{}^{\circ}\xi>t\\ \xi\in T}}\sigma\mathscr{A}_\xi$$

とする．

証明：適当な商空間を考えることにより $(X_t; t\in T)$ は超有限確率空間上で定義されていると考えてよいから，移行の原理より，有限確率空間上のマルチンゲールに関する結果（定理 1.33）の＊解釈が $(X_t;\ t\in T)$ に対して成立する．すなわち，$a<b$ を満す任意の超実数 a,b と $t\in T$ が与えられたとき，$(X_s; s\in T\cap{}^*[0,t])$ の＊区間 ${}^*(a,b)$ に対する上向き通過数 $N=N(t,a,b)$ は

$$E_\mu(N)\leqq\frac{1}{b-a}E_\mu((X_t-a)_+)\leqq\frac{E_\mu|X_t|+|a|}{b-a}$$

を満す．故に，とくに，a と b が実数で，$t\in T$ が有限のとき，上の右辺が有限となるから，$E_\mu(N(t,a,b))$ は有限となる．これより，

$$P(N(t,a,b)\in{}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N})=0$$

が成立する．故に，

$$\Lambda:=\bigcup_{\substack{t\in T\\ t\text{は有限}}}\ \bigcup_{\substack{a,b\in Q\\ a<b}}\{N(t,a,b)\in{}^*\boldsymbol{N}\backslash\boldsymbol{N}\}$$

とおくとき，$P(\Lambda)=0$ となる．

また，定理 1.32 より，任意の有限な $t\in T$ と $n\in\boldsymbol{N}_0$ に対して，

$$P\Big(\max_{s\in T\cap{}^*[0,t]}|X_s|\geqq n\Big)={}^{\circ}\mu\Big(\max_{s\in T\cap{}^*[0,t]}|X_s|\geqq n\Big)$$
$$\leqq\frac{1}{n}{}^{\circ}\!\int|X_t|\,d\mu$$

が成立するから

$$P\Big(\max_{s\in T\cap{}^*[0,t]}|X_s|\ \text{は有限}\Big)=1$$

となる．故に，見本関数 $t\longmapsto X_t(\omega)$ は P-$a.\,a.\,\omega$ に対して S 有限となる．

以上より，定理 3.42 を用いると，見本関数 $t \longmapsto X_t(\omega)$ は P-$a.a.\omega$ に対して，S 右連続かつ S 左連続となる．故に，定理 3.43 より，(X_t; $t \in T$) は右標準部分をもち，右標準部分の見本関数は確率 1 で右連続かつ左極限をもつ．最後の主張については，証明を省略する．（証明終）

3.16 加法過程とその表現

ここでは，3.13 節と同様に，完全可分な確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P) \in U^u$ と，そのローブ拡張 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ を考える．Ω 上の実数値確率過程 (X_t; $t \in [0, \infty)$) が**加法過程**であるとは，以下の条件が満されることをいう．

（1） $X_0(\omega) = 0 \qquad (\forall \omega \in \Omega)$

（2） $X_{t+s} - X_s \overset{\mathcal{L}}{\approx} X_t \qquad (\forall s, t > 0)$

（3） 任意の有限列 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対して，確率変数列 ($X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$; $i = 1, \cdots, n$) は独立となる．

（4） 任意の正の実数 ε に対して，

$$\lim_{t \downarrow 0} P(|X_t| > \varepsilon) = 0$$

他の確率空間上の確率過程も，上の (X_t; $t \in [0, \infty)$) と同じ有限次元分布をもつとき，**加法過程**と呼ばれる．

実数値確率変数列 $X_n (n = 1, 2, \cdots)$ が X に**確率収束**するとは，任意の正の実数 ε に対して，

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

が成立することをいう．明らかに，このような X は P-$a.a.$ の意味で一意的に定まる．

〔定理 3.45〕 (X_t; $t \in [0, \infty)$) が加法過程のとき，$t_n \to t$ $(n \to \infty)$ となる $[0, \infty)$ 上の任意の実数列 (t_n) と $t \in [0, \infty)$ に対して，X_{t_n} は，$n \to \infty$ のとき，X_t に確率収束する．

証明：

$$|X_{t_n} - X_t| \overset{\mathcal{L}}{\approx} |X_{|t_n - t|}|$$

$$|t_n - t| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

だから，$t_n \downarrow 0$ $(n\to\infty)$ のとき，X_{t_n} が 0 に確率収束することをいえばよい．これは，加法過程の定義から明らか．（証明終）

$N \in {}^*\boldsymbol{N}_0 \backslash \boldsymbol{N}_0$ とし，$M = N!$，$\varDelta t = M^{-1}$，

$$T = \{0, \varDelta t, 2\varDelta t, \cdots, M^2 \varDelta t\}$$

とおく．

〔**定理 3.46**〕 Ω 上の任意の加法過程 $(X_t;\ t \in [0, \infty))$ に対して，ローブ拡張 $\tilde{\Omega}$ 上の超有限確率過程 $(Y_t;\ t \in T)$ で以下の条件を満すものが存在する．

（1） $Y_0(\tilde{\omega}) = 0 \qquad (\forall \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega})$

（2） $(Y_{t+\varDelta t} - Y_t;\ t \in T \backslash \{M\})$ は＊独立同一分布に従う．

（3） $(Y_t;\ t \in T)$ は右標準部分 $({}^{\circ +}Y_t;\ t \in [0, \infty))$ をもつ．

（4） $({}^{\circ +}Y_t;\ t \in [0, \infty))$ の見本関数は確率 1 で右連続かつ左極限をもつ．

（5） $({}^{\circ +}Y_t;\ t \in [0, \infty)) \overset{\mathcal{L}}{\approx} (X_t;\ t \in [0, \infty))$

証明：$(X_t;\ t \in [0, \infty))$ の＊解釈 $({}^*X_t;\ t \in {}^*[0, \infty))$ は $\tilde{\Omega}$ 上の＊確率変数列である．内関数 $\varphi : {}^*\boldsymbol{R} \to {}^*\boldsymbol{R}$ を

$$\varphi(x) = \sum_{j=-M^3}^{M^3} jM^{-2} 1_{jM^{-2} \leqq x < (j+1)M^{-2}}$$

と定義する．このとき，φ の値域は超有限集合となる．各 $t \in T \backslash \{M\}$ に対して

$$Z_t = \varphi({}^*X_{t+\varDelta t} - {}^*X_t)$$

と定義する．このとき，$(Z_t;\ t \in T \backslash \{M\})$ は＊独立同一分布に従う超有限確率過程となる．また，定理 3.38 を用いて，

$$ {}^*X_1 = \sum_{n=0}^{M-1} ({}^*X_{(n+1)\varDelta t} - {}^*X_{n\varDelta t})$$

$$\tilde{P}({}^{\circ *}X_1 \in \boldsymbol{R}) = P(X_1 \in \boldsymbol{R}) = 1$$

となるから，定理 3.35 の（1）～（4）が ${}^*X_{\varDelta t}$ に対して成立する．故に，

$$M {}^*P(|{}^*X_{\varDelta t}| \geqq M) \approx 0$$

となり，任意の有限な $t\in T$ に対して

$$
\begin{aligned}
&{}^*P\left(\left|\sum_{\substack{s\in T\\ s<t}} Z_s - {}^*X_t\right| > tM^{-1}\right)\\
&\quad\leqq {}^*P(|{}^*X_{s+\Delta t} - {}^*X_s| \geqq M \ \ (\exists s\in T\cap {}^*[0,t)))\\
&\quad\leqq Mt{}^*P(|{}^*X_{\Delta t}|\geqq M)\approx 0
\end{aligned}
$$

が成立する．各 $t\in T$ に対して

$$
Y_t=\sum_{\substack{s\in T\\ s<t}} Z_s
$$

と定義するとき，$(Y_t;\ t\in T)$ は $\tilde{\Omega}$ 上の超有限確率過程で，明らかに（1）と（2）を満す．

任意の $t\in T$ と $n\in N_0$ に対して

$$
Y_t{}^{(n)}=\sum_{\substack{s\in T\\ s<t}} Z_s 1_{|Z_s|<n}
$$

と定義する．このとき，任意の有限な $t\in T$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\int |Y_t{}^{(n)}|\,d{}^*P\\
&\approx \int \left|\sum_{\substack{s\in T\\ s<t}} ({}^*X_{s+\Delta t}-{}^*X_s)1_{|{}^*X_{s+\Delta t}-{}^*X_s|<n}\right| d{}^*P\\
&\leqq \left(\int \left(\sum_{\substack{s\in T\\ s<t}} ({}^*X_{s+\Delta t}-{}^*X_s)1_{|{}^*X_{s+\Delta t}-{}^*X_s|<n}\right)^2 d{}^*P\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\left(tM\int {}^*X_{\Delta t}{}^2 1_{|{}^*X_{\Delta t}|<n} d{}^*P + tM(tM-1)\left(\int {}^*X_{\Delta t}1_{|{}^*X_{\Delta t}|<n} d{}^*P\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqq \left(tn^2M{}^*P(|{}^*X_{\Delta t}|\geqq 1)+tM\int {}^*X_{\Delta t}{}^2 1_{|{}^*X_{\Delta t}|<1} d{}^*P\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad + tnM{}^*P(|{}^*X_{\Delta t}|\geqq 1) + t\left|M\int {}^*X_{\Delta t}1_{|{}^*X_{\Delta t}|<1} d{}^*P\right|
\end{aligned}
$$

となるから，定理 3.35 の（2）～（4）より，

$$
\int |Y_t{}^{(n)}|\,d{}^*P
$$

は有限となる．また，明らかに，$(Y_t{}^{(n)};\ t\in T)$ は超有限マルチンゲールだから，定理 3.44 より，この見本関数は $\tilde{P}$ に関して確率 1 で S 有限，S 右連続かつ S 左連続となる．

また，定理3.35の（1）と永続性の原理より，任意の$m\in N_0$に対して，$n\in N_0$が存在して

$$M^*P(|^*X_{\Delta t}|\geqq n)<\frac{1}{m}$$

となるから，任意の$t\in T$に対して

$$^*P(Y_s^{(n)}=Y_s\ \ (\forall s\in T\cap{}^*[0,t]))>1-\frac{t}{m}$$

が成立する．これより，$t\in T$が有限のとき

$$\tilde{P}(Y_s^{(n)}=Y_s\ \ (\exists n\in N_0,\ \ \forall s\in T\cap{}^*[0,t]))=1$$

となり，見本関数$T\cap{}^*[0,t]\ni s\longmapsto Y_s(\tilde{\omega})$は$\tilde{P}$-$a.a.\tilde{\omega}$に対して，$S$有限，$S$右連続かつ$S$左連続となる．故に，見本関数$T\ni t\longmapsto Y_t(\tilde{\omega})$が$\tilde{P}$-$a.a.\tilde{\omega}$に対して，$S$有限，$S$右連続かつ$S$左連続となる．故に，定理3.43より（3）と（4）が証明される．

$\tilde{P}$-$a.a.\tilde{\omega}$に対して，$^*X_t(\tilde{\omega})\approx Y_t(\tilde{\omega})$がすべての有限な$t\in T$に対して成立するから，$(Y_t;\ t\in T)$の右標準部分は$(^*X_t;\ t\in T)$の右標準部分と$\tilde{P}$-$a.a.$の意味で一致する．故に，（5）を示すためには，

$$({}^{\circ+*}X_t;\ \ t\in[0,\infty))\overset{\mathcal{L}}{=}(X_t;\ \ t\in[0,\infty))$$

をいえばよい．このためには，$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{B}},\tilde{P})$上の二つの確率変数列$({}^{\circ+*}X_t;\ t\in[0,\infty))$と$(\tilde{X}_t;\ t\in[0,\infty))$が同じ有限次元分布をもてばよい．このためには，任意の$t\in[0,\infty)$に対して

$${}^{\circ+*}X_t(\tilde{\omega})=\tilde{X}(\tilde{\omega})\ \ (\tilde{P}\text{-}a.a.\tilde{\omega})$$

をいえば十分である．ところで，$\tilde{P}$-$a.a.\tilde{\omega}$に対して，$^{\circ}\xi=t$となる$\xi\in T$が存在して，$^{\circ}\eta=t$かつ$\eta\geqq\xi$となる任意の$\eta\in T$に対して

$${}^{\circ+*}X_t(\tilde{\omega})={}^{\circ*}X_\eta(\tilde{\omega})$$

となる．故に，任意の正の実数εに対して，永続性の原理を用いると，正の実数δが存在して，任意の$s\in T\cap{}^*[\xi,\xi+\delta)$に対して

$$|^*X_s(\tilde{\omega})-{}^{\circ+*}X_t(\tilde{\omega})|<\varepsilon$$

が成立する．$M=N!$だから，$Q\cap[0,\infty)\subset T$となっている．故に，定

理 3.38 より

$$°{+}{*}X_t(\tilde{\omega})=\lim_{\substack{s\downarrow t\\ s\in Q}}°{*}X_s(\tilde{\omega})=\lim_{\substack{s\downarrow t\\ s\in Q}}\tilde{X}_s(\tilde{\omega})$$

が $\tilde{P}$-*a.a.* $\tilde{\omega}$ に対して成立する．これから，$\boldsymbol{Q}\ni s\downarrow t$ のとき，$\tilde{X}_s$ が $°{+}{*}X_t$ に確率収束することがわかる．他方，定理 3.45 より，このとき，$\tilde{X}_s$ は $\tilde{X}_t$ に確率収束する．故に，$\tilde{X}_t$ と $°{+}{*}X_t$ は $\tilde{P}$-*a.a.* の意味で一致する．以上より，（5）が成立する． (証明終)

3.17 ブラウン運動

前節と同じ記号を用いる．加法過程 $(X_t;\ t\in[0,\infty))$ は，$E(X_1)=0$, $V(X_1)=1$ かつ見本関数が確率 1 で連続のとき，**ブラウン運動**と呼ばれる．

〔定理 3.47〕 $(X_t;\ t\in[0,\infty))$ が Ω 上のブラウン運動のとき，その拡張 $(\tilde{X}_t;\ t\in[0,\infty))$ は $\tilde{\Omega}$ 上のブラウン運動となり，これに対して，以下の条件を満す $\tilde{\Omega}$ 上の超有限確率過程 $(Y_t;\ t\in M)$ が存在する．

（1） $Y_0(\tilde{\omega})=0 \qquad (\forall\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega})$

（2） $(Y_{t+\Delta t}-Y_t;\ t\in T\backslash\{M\})$ は＊独立同一分布に従い，$MY^2_{\Delta t}$ は S^*P 可積分である．

（3） $\int Y_{\Delta t}d^*P=0, \qquad \int Y^2_{\Delta t}d^*P=\Delta t$

（4） $(\tilde{X}_t;\ t\in[0,\infty))$ は $(Y_t;\ t\in T)$ の標準部分である．

逆に，$\tilde{\Omega}$ 上の超有限確率過程 $(Y_t;\ t\in T)$ は，上の条件（1）～（3）を満すとき，標準部分をもち，標準部分はブラウン運動となる．また，任意の $t\in[0,\infty)$ に対して，X_t は正規分布 $N(0,t)$ に従う．

証明：定理 3.40 より，任意の $t\in[0,\infty)$ に対して，X_t は正規分布 $N(0,t)$ に従うことが容易に示される．故に，移行の原理より，任意の $t\in T$ に対して，${}^*X_t$ は＊正規分布 ${}^*N(0,t)$ に従う．とくに，$\sqrt{M}X_{\Delta t}$ は ${}^*N(0,1)$ に従うので，$M^*X^2_{\Delta t}$ は S^*P 可積分となる．内関数 $\varphi:{}^*\boldsymbol{R}\to{}^*\boldsymbol{R}$ で，値域は超有限集合，$|\varphi(x)|\leqq|x|+1/M\ (\forall x\in{}^*\boldsymbol{R})$，かつ

$$\int \varphi({}^*X_{\Delta t})\,d{}^*P=0$$

$$\int \varphi({}^*X_{\Delta t})^2 d{}^*P=\Delta t$$

$${}^*P(|{}^*X_{\Delta t}-\varphi({}^*X_{\Delta t})|>M^{-2})<M^{-2}$$

を満すものがとれる．このとき，各 $t\in T$ に対して

$$Y_t=\sum_{\substack{s\in T\\ s<t}}\varphi({}^*X_{s+\Delta t}-{}^*X_s)$$

と定義するとき，$\tilde{\Omega}$ 上の超有限確率過程 $(Y_t; t\in T)$ は条件 (1)～(2) を満す．

任意の $t\in T$ に対して

$${}^*P\left(|{}^*X_s-Y_s|\leqq\frac{t}{M}\quad(\forall s\in T\cap{}^*[0,t])\right)>1-\frac{t}{M}$$

だから，

$$\tilde{P}({}^*X_t\approx Y_t\quad(\forall t\in T：\text{有限}))=1$$

となる．故に，$(Y_t;\ t\in T)$ の標準部分と $({}^*X_t;\ t\in T)$ の標準部分は $\tilde{P}$-$a.\,a.$ の意味で一致する．故に，(4) を示すためには，$({}^*X_t;\ t\in T)$ の標準部分が $(\tilde{X}_t;\ t\in[0,\infty))$ となることをいえばよい．定理 3.46 で証明したように，$({}^*X_t;\ t\in T)$ は右標準部分 $({}^{\circ+*}X_t;\ t\in[0,\infty))$ をもち，かつ，任意の $t\in[0,\infty)$ に対して，${}^{\circ+*}X_t(\tilde{\omega})=\tilde{X}_t(\tilde{\omega})$ が $\tilde{P}$-$a.\,a.\,\tilde{\omega}$ に対して成立する．$(\tilde{X}_t;\ t\in[0,\infty))$ の見本関数は確率 1 で連続だから，$\tilde{P}$-$a.\,a.\,\tilde{\omega}$ に対して

$${}^{\circ+*}X_t(\tilde{\omega})=\tilde{X}_t(\tilde{\omega})\qquad(\forall t\in[0,\infty))$$

が成立し，$(\tilde{X}_t;\ t\in[0,\infty))$ は $({}^*X_t;\ t\in T)$ の右標準部分となる．故に，前者が後者の標準部分となることをいうためには，後者が S 連続となることをいえばよい．

任意の $t\in T$ に対して，${}^*X_t$ は＊正規分布 ${}^*N(0,t)$ に従い，${}^*N(0,\Delta t)$ は 0 に関して対称な分布だから，定理 1.13 の鏡像の原理を用いて，任意の正の超実数 c に対して

$$
\begin{aligned}
&{}^*P\left(\max_{\substack{s\in T\\ s\leq t}} {}^*X_s \geqq c\right)\\
&= {}^*P({}^*X_t \geqq c) + {}^*P\left(\max_{\substack{s\in T\\ s\leq t}} {}^*X_s \geqq c,\quad X_t < c\right)\\
&= {}^*P({}^*X_t \geqq c) + {}^*P({}^*X_t > c)\\
&\leqq 2{}^*P({}^*X_t \geqq c)\\
&= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_c^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}} {}^*dx\\
&\leqq \frac{1}{\sqrt{t}}\int_c^\infty \frac{x}{c} e^{-\frac{x^2}{2t}} {}^*dx\\
&= \frac{\sqrt{t}}{c} e^{-\frac{c^2}{2t}}
\end{aligned}
$$

が成立する．故に，任意の $t\in T\cap{}^*(0,1/3]$ に対して

$$
\begin{aligned}
&{}^*P\left(\max_{\substack{s\in T\\ s\leq t}} |{}^*X_s| \geqq 2\sqrt{t\log\frac{1}{t}}\right)\\
&\leqq 2\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t\log\frac{1}{t}}} e^{\frac{-4t\log\frac{1}{t}}{2t}}\\
&\leqq t^2
\end{aligned}
$$

が成立する．

よって，任意の $L\in \boldsymbol{N}_0$ と $l\in \boldsymbol{N}_0$ に対して

$$
\varepsilon_L = 2^{-L-2}
$$

$$
\delta_L = 2\sqrt{\varepsilon_{L-1}\log\frac{1}{\varepsilon_{L-1}}}
$$

とおくとき，

$$
\begin{aligned}
&{}^*P\left(\max_{\substack{s,t\in T\cap{}^*[0,l]\\ |s-t|\leq \varepsilon_L}} |{}^*X_s - {}^*X_t| \geqq 2\delta_L\right)\\
&\leqq {}^*P\left(\bigcup_{n=0}^{l2^{L+2}-1}\left\{\max_{t\in T\cap{}^*[n\varepsilon_L,\, n\varepsilon_L+\varepsilon_{L-1}]} |{}^*X_t - {}^*X_{n\varepsilon_L}| \geqq \delta_L\right\}\right)\\
&\leqq l2^{L+2}\,{}^*P\left(\max_{\substack{t\in T\\ t\leq \varepsilon_{L-1}}} |{}^*X_t| \geqq \delta_L\right)\\
&\leqq l2^{L+2}\cdot {\varepsilon_{L-1}}^2 = l2^{-L}
\end{aligned}
$$

が成立する．故に，

$$\begin{aligned}&\tilde{P}({}^*X_s \not\approx {}^*X_t \ \ (\exists s, t \in T \cap {}^*[0, l],\ \ s \approx t)) \\ &\leqq \tilde{P}\Big(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{L=N}^{\infty} \Big\{ \max_{\substack{s,t \in T \cap {}^*[0,l] \\ |s-t| \leqq \varepsilon_L}} |{}^*X_s - {}^*X_t| \geqq 2\delta_L \Big\}\Big) \\ &\leqq \lim_{L\to\infty} l2^{-L} = 0\end{aligned}$$

を得る．$l \in N_0$ は任意だから，$(X_t;\ t \in T)$ は S 連続となり，条件（4）が成立する．

次に，条件（1）～（3）を満す $\tilde{\Omega}$ 上の超有限確率過程 $(Y_t;\ t \in T)$ が与えられたとする．明らかに，$(Y_t;\ t \in T)$ は超有限マルチンゲールとなる．また，任意の $t \in \boldsymbol{Q} \cap (0, \infty) \subset T$ に対して，定理 3.40 より ${}^\circ Y_t$ は正規分布 $N(0, t)$ に従う．また，任意の有限な $t \in T$ に対して，

$$\int Y_t{}^2 d{}^*P = t$$

が有限だから，$(Y_t;\ t \in T)$ は S 有限となる．以下，$Y_{\Delta t}$ の分布が 0 に関して対称な場合について，$(Y_t;\ t \in T)$ が S 連続であることを示す．一般の場合は，定理 3.34 の必要性の証明と同様に，$Y_{\Delta t}$ を対称化すればよい．

対称性の仮定より，鏡像の原理を用いて，任意の $t \in \boldsymbol{Q} \cap (0, \infty)$ と正の実数 c に対して，先と同様に

$$\begin{aligned}{}^*P\Big(\max_{\substack{s \in T \\ s \leqq t}} Y_s \geqq 2c\Big) &\leqq 2{}^*P(Y_t \geqq 2c) \\ &\leqq 4\tilde{P}({}^\circ Y_t \geqq c) \\ &\leqq \frac{2\sqrt{t}}{c} e^{-\frac{c^2}{2t}}\end{aligned}$$

が成立する．これより，先と同様にして，$(Y_t;\ t \in T)$ が S 連続であることが示される．故に，定理 3.41 より，$(Y_t;\ t \in T)$ は標準部分 $({}^\circ Y_t;\ t \in [0, \infty))$ をもつ．$({}^\circ Y_t;\ t \in [0, \infty))$ は，明らかに，連続な加法過程となる．また，${}^\circ Y_1$ は正規分布 $N(0, 1)$ に従うから，これはブラウン運動となる．（証明終）

例： 定理 3.47 において，とくに，$Y_{\Delta t}$ を

$$ {}^*P(Y_{\Delta t}=\sqrt{\Delta t})={}^*P(Y_{\Delta t}=-\sqrt{\Delta t})=\frac{1}{2} $$

となるように選ぶとき，$({}^\circ Y_t;\ t\in[0,\infty))$ はブラウン運動となる．これを，**アンダーソンのブラウン運動**と呼ぶ．

編集者短評

確率論は，教育課程のなかであまり恵まれた位置にない．せっかく高等学校でその初歩を習うのに，大学に入ると普通二年間お休みになってしまう．それにはいろいろな理由があるが，その一つとしてつぎのことがある．まず高等学校の確率論はサイコロふりを典型例とする有限（組合せ）確率論であり，この枠のなかでは大したことはできない，と思われていること．そして，もっと本格的な現代確率論を学ぶにはルベーグ積分論，さらに一般の測度論が必要であり，大学初年級ではそんなことをやるひまがないこと．私もこのとおりの教育を受け，数学科ではじめて本格的な確率論の講義をきいた．

さて，この本の第１章を見てごらんなさい．ここは「組合せ確率論」と題されているけれども，こんなにも豊富な内容が盛れるのだ．測度論の面倒くささがないから直観的にもわかりやすい．だから，組合せ確率論では大したことができないというより，普通やる気がおこらない，というのが実情だろう．著者がここで組合せ確率論をフルに展開するのは，決して思いつきや趣味だけによるのではなく，これが第３章の本格的理論に全面的に使われるからでもあるのだ．

第２章で測度論がていねいに導入してあるけれども，確率論にはあまり深入りしない．それは第３章という，他に類例のない章が控えているからだ．

第３章こそ，まったく新しい原理による確率論の記述であり，世界で

はじめてのものである．これを可能にしたのは超準解析（ノンスタンダード・アナリシス）の発展である．この新しい数学の手法は30年近く前に開発された．そして15年近く前にローブ測度という概念が導入され，それによって超準確率論が飛躍的に発展することになった．

第3章のはじめに，超準解析の原理がていねいに説明してある．これは，数学を記号の体系として解釈するという新しい視点を必要とするため，必ずしもいつもわかりやすいとはいえない．しかし，いったん慣れてしまえば，直観のよく効く強力な手法であることがわかる．著者は導入部に大いに工夫を施しているので，内容豊富なわりにわかりやすくなっている．

超準解析の手法を使うと，確率解析の本格的理論に，組合せ確率論がフルに有効性を発揮するのである．

超準確率論は現在発展中の理論であるため，いままでその入門教科書はなかった．研究書が英語で出ている程度である．だからこの本は，世界最初の，まったく画期的な教科書だということができる．

（斎藤正彦）

索　　引

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ　行

本書で使用した主な記号

著者略歴

釜江哲朗（かまえ てつろう）

1941年　大阪府に生まれる
1965年　東京大学理学部化学科卒業
現　在　大阪市立大学理学部数学科教授
　　　　理学博士

すうがくぶっくす9
超準的手法にもとづく
確率解析入門　　　　定価はカバーに表示

1990年 1 月 20 日　初版第1刷
2000年 3 月 10 日　第5刷

著　者　釜　江　哲　朗
発行者　朝　倉　邦　造
発行所　株式会社　朝　倉　書　店
東京都新宿区新小川町 6−29
郵便番号　162−8707
電　話　03（3260）0141
F A X　03（3260）0180

〈検印省略〉

誠文社印刷・渡辺製本

ISBN 4-254-11469-9　C3341　　Printed in Japan